

円分体の岩澤不変量の観察

高橋 浩樹

広島大学・理学研究科

§1. はじまり

§2. ゼータ値と非正則素数

§3. $\mathbb{Z}_p$ -拡大のイデアル類群の p -部分

§4. 計算機による実例

§5. $\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_p$ -拡大のイデアル類群の p -部分

§ 1 はじまり

オイラーの計算 (1735 頃)

リーマンゼータ値 $\zeta(2k)$ ($2k = 2, 4, 6, 8, 10, 12.$)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.} = \frac{p^2}{6} = P \leftarrow \text{バーゼル問題}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc.} = \frac{691 p^{12}}{6425 \cdot 93555} = V.$$

指数最小の非正則素数 691

~1748頃 $k=2 \sim 34$ の偶ゼータ値を計算.

オイラーの計算 (1748 頃)

ディリクレ L 値 $L(2k+1, \chi_{-4})$

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. &= a. & \frac{\pi}{2^2} \\
 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c. &= \frac{b}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\pi^3}{2^4} \\
 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \&c. &= \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\pi^5}{2^6} \\
 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \&c. &= \frac{\delta}{1 \cdot 2 \dots 6} \cdot \frac{\pi^7}{2^8} \\
 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \&c. &= \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2 \dots 8} \cdot \frac{\pi^9}{2^{10}} \\
 1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \&c. &= \frac{\zeta}{1 \cdot 2 \dots 10} \cdot \frac{\pi^{11}}{2^{12}}
 \end{aligned}$$

←ライプニッツの公式

a	$=$	1	指数最小の 非正則素数
b	$=$	1	
γ	$=$	5	
δ	$=$	61	← 61
ε	$=$	1385	
ζ	$=$	50521	
η	$=$	2702765	
θ	$=$	199360981	
ι	$=$	19391512145	
κ	$=$	2404879661671	
		&c.	

$k=1 \sim 19$ の奇 L 値を計算.

§ 2 ゼータ値と非正則素数

$F : \mathbf{Q}$ 上のアーベル拡大

$\Delta = \text{Gal}(F/\mathbf{Q})$, $\hat{\Delta} : \Delta$ の指標全体 (ディリクレ指標)

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a} \neq (0)} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$\zeta_F(s) = \prod_{\chi \in \hat{\Delta}} L(s, \chi)$$

性質

解析接続

オイラー積

関数等式

特殊値

負の整数点での L 値

$$L(1-n, \chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n} \in \mathbf{Q}(\chi(1), \chi(2), \dots, \chi(f))$$

$$\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} \quad (\text{一般ベルヌーイ数})$$

χ が偶指標のとき $B_{2k+1,\chi} = 0$,

χ が奇指標のとき $B_{2k,\chi} = 0$.

例 1 (リーマンゼータ関数)

$$F = \mathbf{Q}, \hat{\Delta} = \{\chi_1\}, \zeta_{\mathbf{Q}}(s) = L(s, \chi_1) \quad L(-2k, \chi_1) = 0$$

$$L(1 - 2k, \chi_1) = -B_{2k}/2k \text{ の分母}$$

$2k$	分母				
2	12	=	$2^2 \cdot 3$		
4	120	=	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	周期 $p - 1$	
6	252	=	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$		
8	240	=	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$		
10	132	=	$2^2 \cdot 3 \cdot 11$		
12	32760	=	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$		
14	12	=	$2^2 \cdot 3$		
16	8160	=	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$		
18	14364	=	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 19$		

$$L(1 - 2k, \chi_1) = -B_{2k}/2k \text{ の分子}$$

$2k$	分子	$2k$	分子
2	— 1	20	283 · 617
4	1	22	— 131 · 593
6	— 1	24	103 · 2294797
8	1	26	— 657931
10	— 1	28	9349 · 362903
12	691	30	— 1721 · 1061259881
14	— 1	32	37 · 683 · 305065927
16	3617	34	— 151628697551
18	— 43867		

周期 $p - 1(?!)$

関孝和, ヤコブ・ベルヌーイは, B_{10} までしか示していない.
 そのため, 691 は登場しなかった.

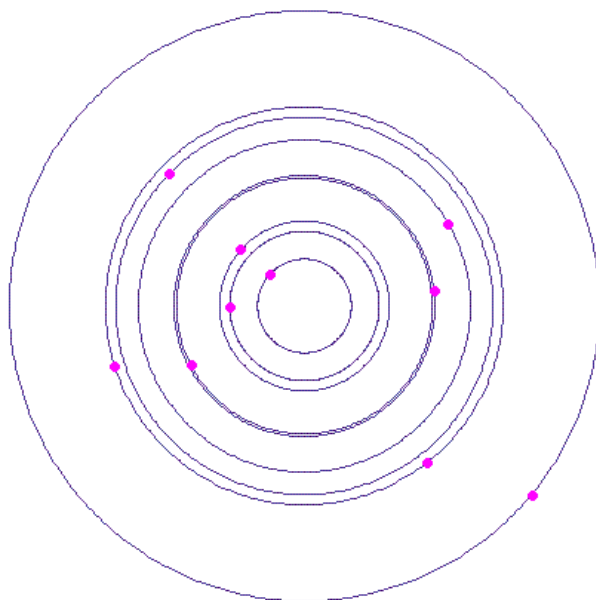
$$\text{非正則組 } (p, 2k) \quad (1 \leq 2k \leq p-2) \\ \iff p \mid L(1-2k-m(p-1), \chi_1)$$

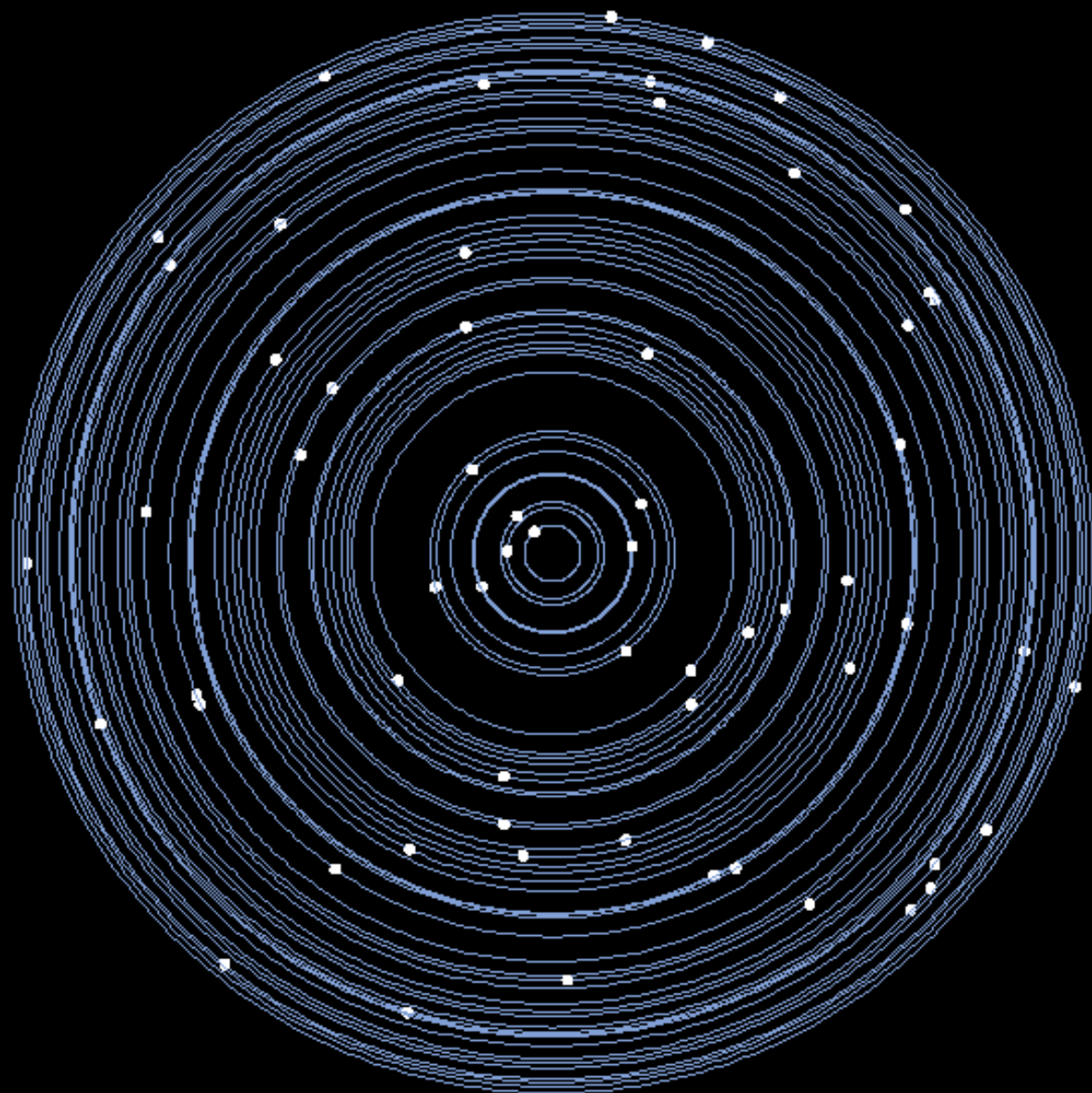
10 個の非正則組

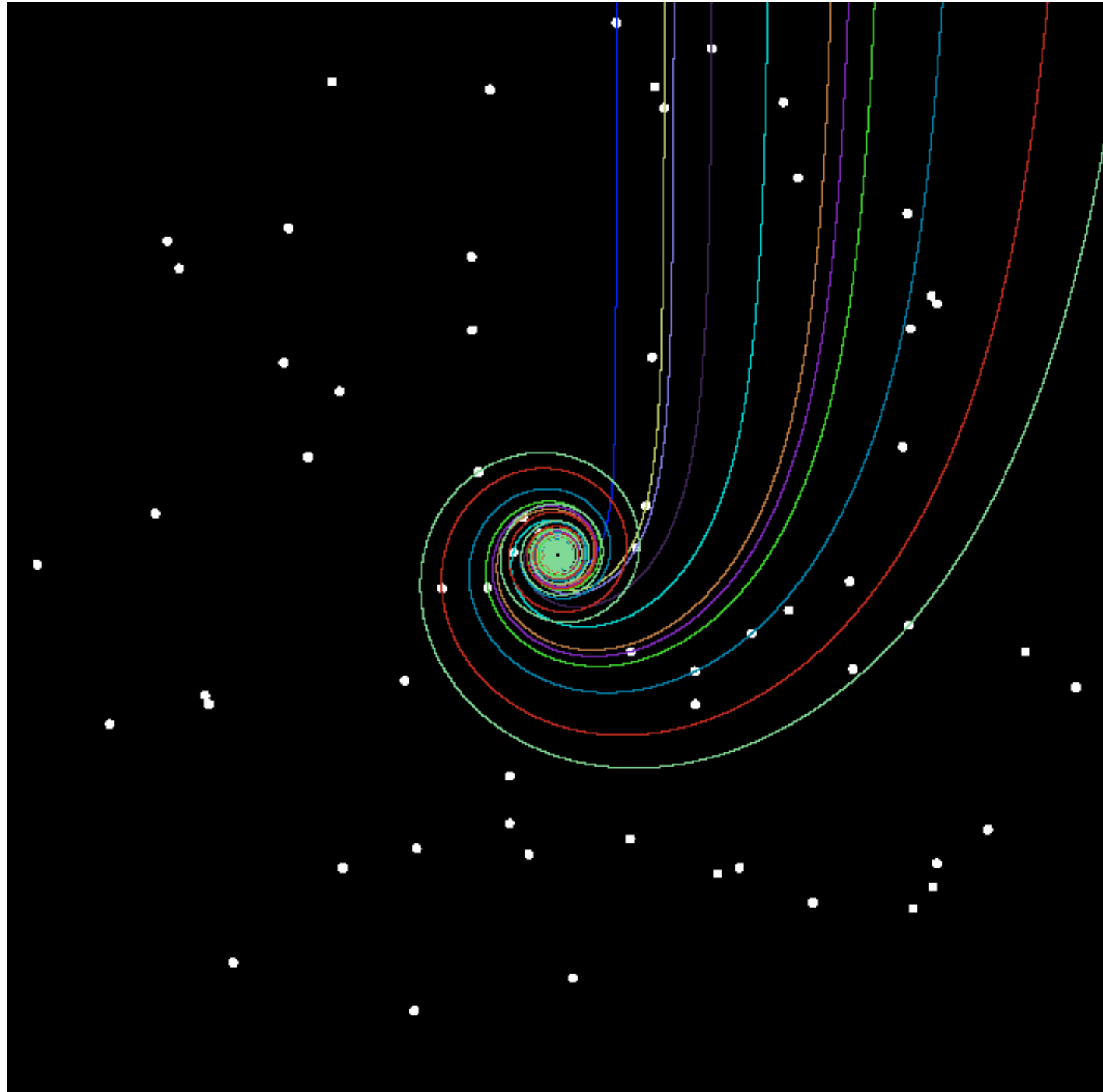
$$(37, 32) \ (59, 44), \ (67, 58)$$

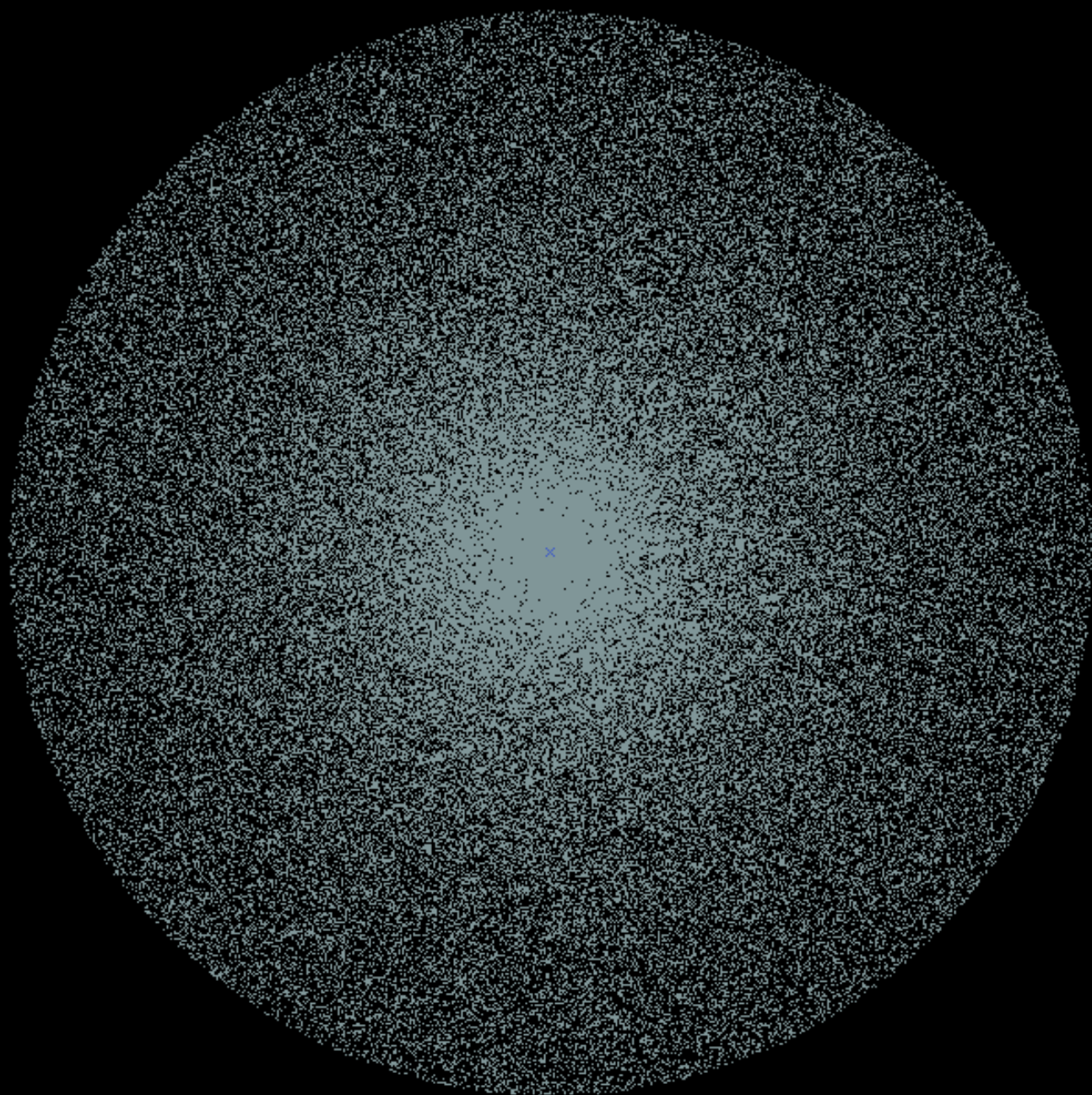
$$(101, 68), \ (103, 24), \ (131, 22), \ (149, 130)$$

$$(157, 62), \ (157, 110), \ (233, 84)$$









例 2 (二次体のデデキントゼータ関数)

$$F = \mathbf{Q}(\sqrt{f}), \hat{\Delta} = \{\chi_1, \chi_f\}, \zeta_F(s) = L(s, \chi_1)L(s, \chi_f)$$

$$\begin{cases} L(-2k, \chi) = 0 \cdots \chi(-1) = 1 \cdots \text{偶指標} \\ L(1-2k, \chi) = 0 \cdots \chi(-1) = -1 \cdots \text{奇指標} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L(s, \chi_1) \\ = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(s, \chi_{-4}) \\ = \frac{1}{1^s} + \frac{0}{2^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{0}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{0}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{0}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{0}{10^s} - \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(s, \chi_5) \\ = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{0}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} - \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{0}{10^s} + \cdots \end{aligned}$$

$$F = \mathbf{Q}(\sqrt{-4}) = \mathbf{Q}(i)$$

$$\chi_{-4}\text{-非正則組 } (p, 2k+1) \quad (2 \leq 2k \leq p-3)$$

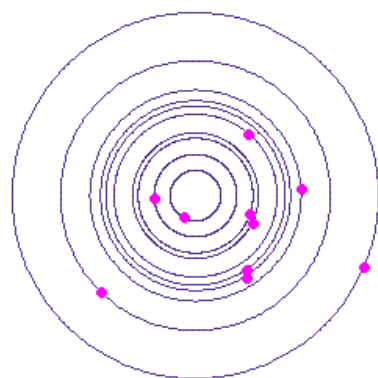
$$\iff p \mid L(-2k - m(p-1), \chi_{-4})$$

10 個の χ_{-4} -非正則組

$$(19, 11) \ (31, 23), \ (43, 13)$$

$$(47, 15), \ (61, 7), \ (67, 27), \ (71, 29)$$

$$(79, 19), \ (101, 63), \ (137, 43)$$



$$F = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$$

χ_5 -非正則組 $(p, 2k) \quad (2 \leq 2k \leq p-3)$

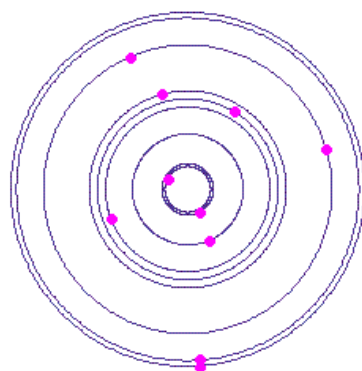
$$\iff p \mid L(1 - 2k - m(p-1), \chi_5)$$

10 個の χ_5 -非正則組

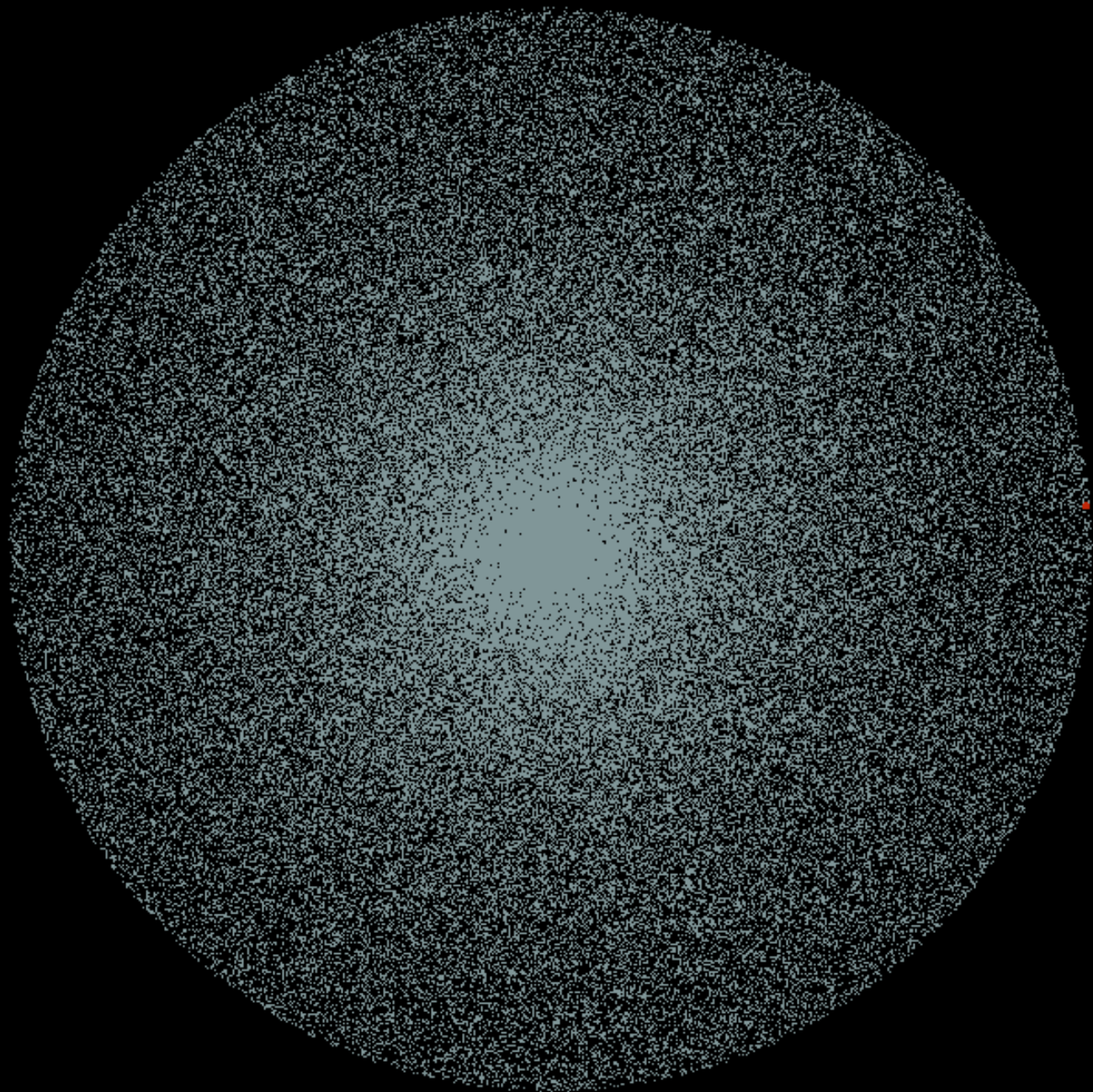
$(17, 14) \ (19, 8), \ (41, 18)$

$(61, 42), \ (67, 6), \ (73, 70), \ (107, 22)$

$(107, 100), \ (127, 62), \ (131, 64)$



より詳しくプログラム
で説明



§ 3 $\mathbf{Z}_p$ -拡大のイデアル類群の p -部分

p : 奇素数, $\overline{\mathbf{Q}} \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$: 固定

$$F = \mathbf{Q}(\sqrt{f}) \text{ s.t. } F \cap \mathbf{Q}(\zeta_p) = \mathbf{Q}$$

$$K = K_{f,p} = F(\zeta_p), K_n = F(\zeta_{p^{n+1}})$$

$$A_n = A_{(f,p),n} = Cl(K_n)(p).$$

$\chi = \chi_f$: F に付随する非自明なディリクレ指標

$\omega = \omega_p$: タイヒミュラー指標 ($\omega(a) \equiv a \pmod{p}$)

$$\Delta' = \text{Gal}(K_\infty/\mathbf{Q}_\infty) \simeq \text{Gal}(K/\mathbf{Q})$$

$$\psi \in \hat{\Delta}', e_\psi = \frac{1}{|\Delta'|} \sum_{\delta \in \Delta'} \psi(\delta) \delta^{-1} \in \mathbf{Z}_p[\Delta']$$

$$M(\psi) = e_\psi M.$$

$$A_n = \left\{ \begin{array}{cc} \bigoplus A_n(\chi_1 \omega^i) & \bigoplus \bigoplus A_n(\chi_1 \omega^{p-i}) \\ \bigoplus A_n(\chi_f \omega^i) & \bigoplus \bigoplus A_n(\chi_f \omega^{p-i}) \end{array} \right.$$

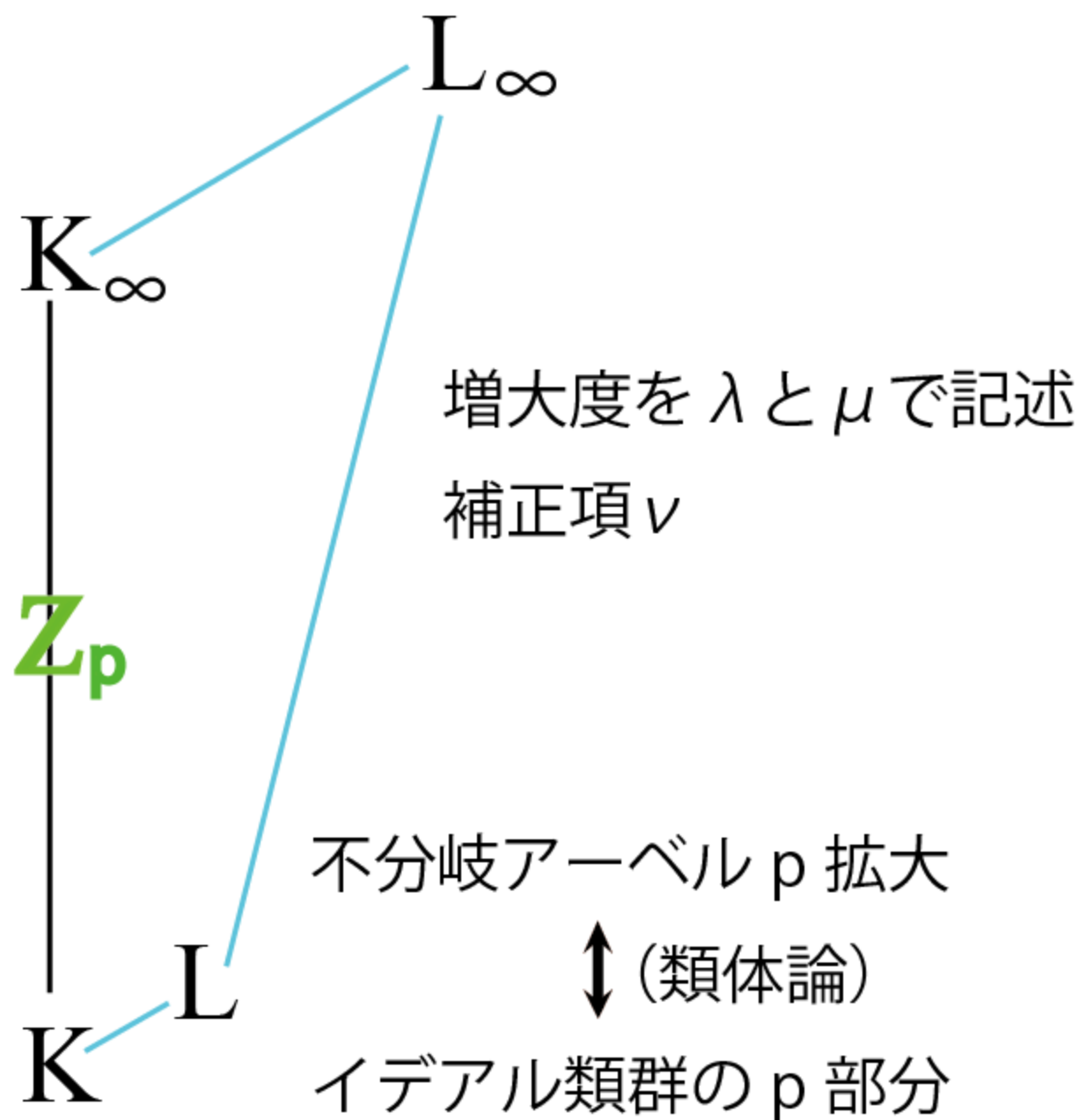
偶指標
奇指標

岩澤不変量（指標による分解）

不変量 $\lambda_p(\psi), \mu_p(\psi), \nu_p(\psi) \in \mathbf{Z}$ が存在して,

$$|A_n(\psi)| = p^{\lambda_p(\psi)n + \mu_p(\psi)p^n + \nu_p(\psi)}$$

が十分大きな n に対し成立する.



$\mu = 0$ (Ferrero–Washington)

円分体では, $\mu_p(\psi) = 0$.

岩澤主予想の系 (Mazur–Wiles)

(p, i) が χ -非正則

$\iff A_1(\chi\omega^{p-i}) \neq \{0\} \cdots$ 奇指標

$\iff \lambda_p(\chi\omega^{p-i}) \geq 1 \cdots$ 奇指標

一般ベルヌーイ数から奇指標の不変量を計算できる.

Kummer-Vandiver の予想

全ての p, i に対し, $A_n(\chi_1 \omega^i) = \{0\}$

$\iff \lambda_p(\chi_1 \omega^i) = \nu_p(\chi_1 \omega^i) = 0 \cdots$ 偶指標

Greenberg の予想

全ての p, i, χ に対し, $\lambda_p(\chi \omega^i) = 0 \cdots$ 偶指標

いずれも未解決.

円単数, p 進 L 関数等を用いて, 小さな素数 p ,
小さな導手 f に対して調査されている.

§4 計算機による実例

p が大きいとき,

$$\begin{cases} \lambda_p(\chi\omega^{p-i}) = \nu_p(\chi\omega^{p-i}) \leq 1 & \text{奇指標} \\ \lambda_p(\chi\omega^i) = \nu_p(\chi\omega^i) = 0 & \text{偶指標} \end{cases}$$

となる組がほとんどである.

$\chi = \chi_1$ に対し, 1.63 億以下の全ての素数について
上の不等式・等式が確認されている. (Buhler, Harvey)

Kummer-Vandiver予想は正しそうか？

$\chi = \chi_f \neq \chi_1$ に対し, $A_n(\psi)$ が非自明となる組 (p, ψ)
 $-200 < f < 200, 5 \leq p < 250000$
 約 1600 億 (全体)—約 134 万 (奇指標)—88 (偶指標)

例外組 (p, ψ) の個数の期待値 ($x_1 \leq p \leq x_2$)

$$E = \sum_{x_1 \leq p \leq x_2} \frac{p-3}{2} \frac{1}{p} \frac{1}{p} \approx \frac{1}{2} (\log \log x_2 - \log \log x_1)$$

指標の個数

円単数が局所元の p 乗
 $(\lambda^- \geq 1)$

2元が局所元の p 乗 ($\lambda^- \geq 2$)

局所元の p^2 乗 ($v^- \geq 2$)

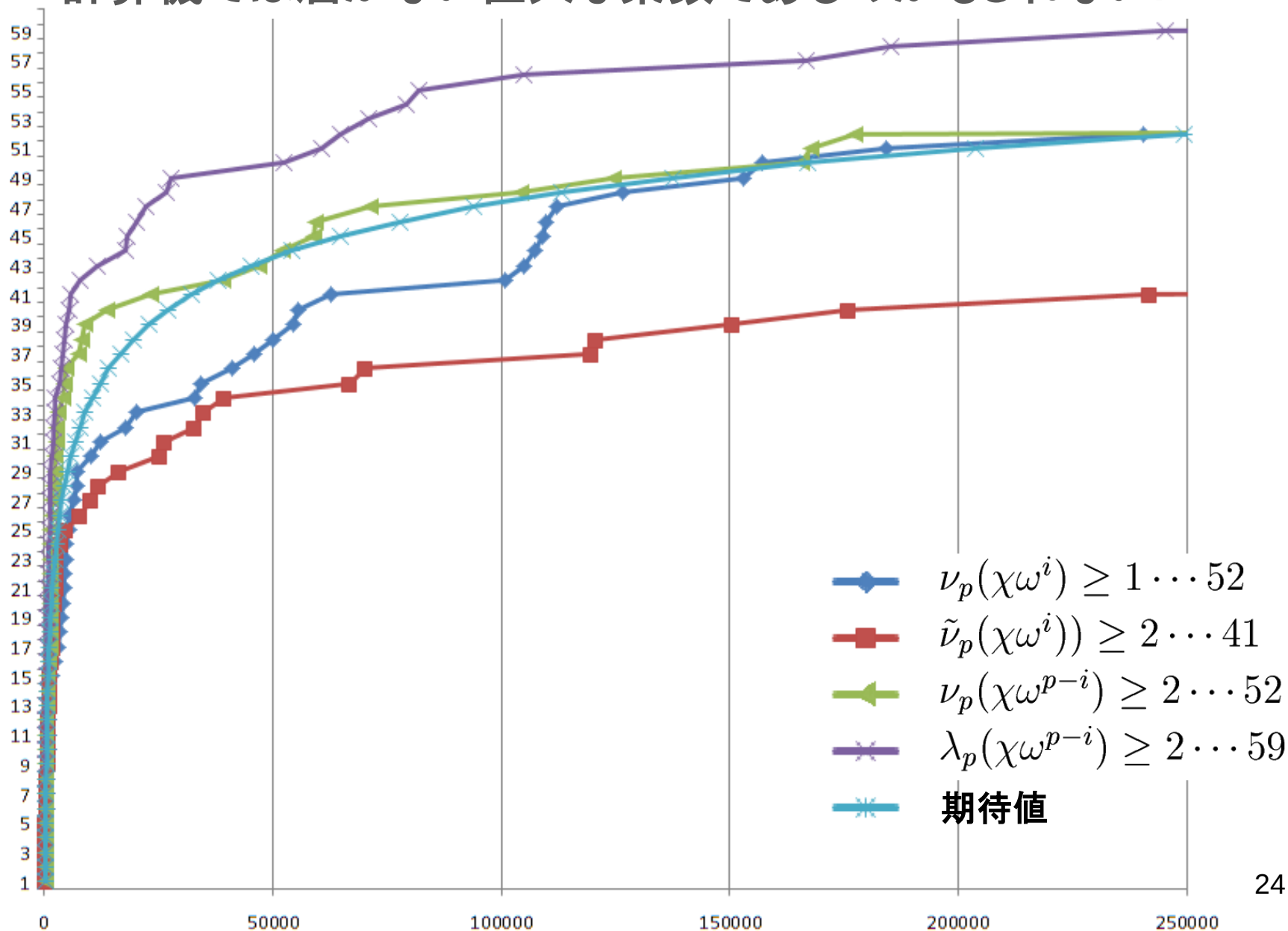
大域元の p 乗 ($v^+ \geq 1$)

χ の個数 : $60 + 62 = 122$ 個,

$x_1 = 200, x_2 = 250000$ とすると,

$122 * E \approx 52.01 \dots$

Kummer-Vandiver予想に反例があったとしても、現在の
計算機では届かない巨大な素数であるのかもしれない。



$p = 4953979$ に対し,

$$A_n(\chi_5 \omega^{3779459}) \simeq \mathbf{Z}/p^{n+2}\mathbf{Z} \cdots \nu^- \geq 2$$

$p = 157229$ に対し,

$$A_n(\chi_8 \omega^{140434}) \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \cdots \nu^+ \geq 1$$

例外組 (p, ψ) の代表元の個数の期待値

F : 実アーベル体, $\Delta = \text{Gal}(F/\mathbf{Q})$

$\psi \in \hat{\Delta}$ に対し,

$$\begin{cases} n_{p,\psi} = [\mathbf{Q}_p(\zeta_{\text{ord}(\psi)}) : \mathbf{Q}_p] \\ f_{p,\psi} = [\mathbf{Q}_p(\zeta_{\text{ord}(\psi)})^{ur} : \mathbf{Q}_p] \end{cases}$$

$\hat{\Delta}_p$: $\hat{\Delta}$ の元の $\mathbf{Q}_p$ -共役による同値類の代表系

$$|\Delta| = |\hat{\Delta}| = \sum_{\psi \in \hat{\Delta}_p} n_{p,\psi}$$

$$E_p \approx \sum_{\psi \in \hat{\Delta}_p} \frac{1}{p^{f_{p,\psi}}} \frac{1}{p^{f_{p,\psi}}}$$

$\uparrow$
 $\lambda^- \geq 1$

$\uparrow$
 $\lambda^- \geq 2$
 $\nu^- \geq 2$
 $\nu^+ \geq 1$

先の実例では,
各 p で F が変化し,
 $\text{ord}(\psi) | (p-1)$ より

$$n_{p,\psi} = f_{p,\psi} = 1$$

$$\Rightarrow E_p \approx |\hat{\Delta}| \frac{1}{p} \frac{1}{p}$$

(最大)

円分 $\mathbf{Z}_l$ -拡大の場合 ($l \neq p$)

$$F \cap \mathbf{Q}_\infty^l = \mathbf{Q}$$

$$F = F_{l,0} \subset F_{l,1} \subset \cdots \subset F_{l,\infty} = F\mathbf{Q}_\infty^l$$

$$\Delta_{l,n} = \text{Gal}(F_{l,n}/F) \simeq \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$$

$\psi_n \in \hat{\Delta}_{l,n}$: 位数 l^n の指標 ($n \geq 1$)

$$n_0 = v_l(p^{l-1} - 1), \quad f_{p,\psi_n} = c_{p,l} l^{\max\{n-n_0, 0\}}$$

$n \geq n_0$ において,

$$E_{p,n_0} \approx \sum_{n \geq n_0} c'_{p,l} \frac{1}{p^{c_{p,l} l^{n-n_0}}} \frac{1}{p^{c_{p,l} l^{n-n_0}}}$$

$l=p$ のときは, このような考え方は明らかに誤り.

§ 5 $\mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_p$ -拡大のイデアル類群の p -部分

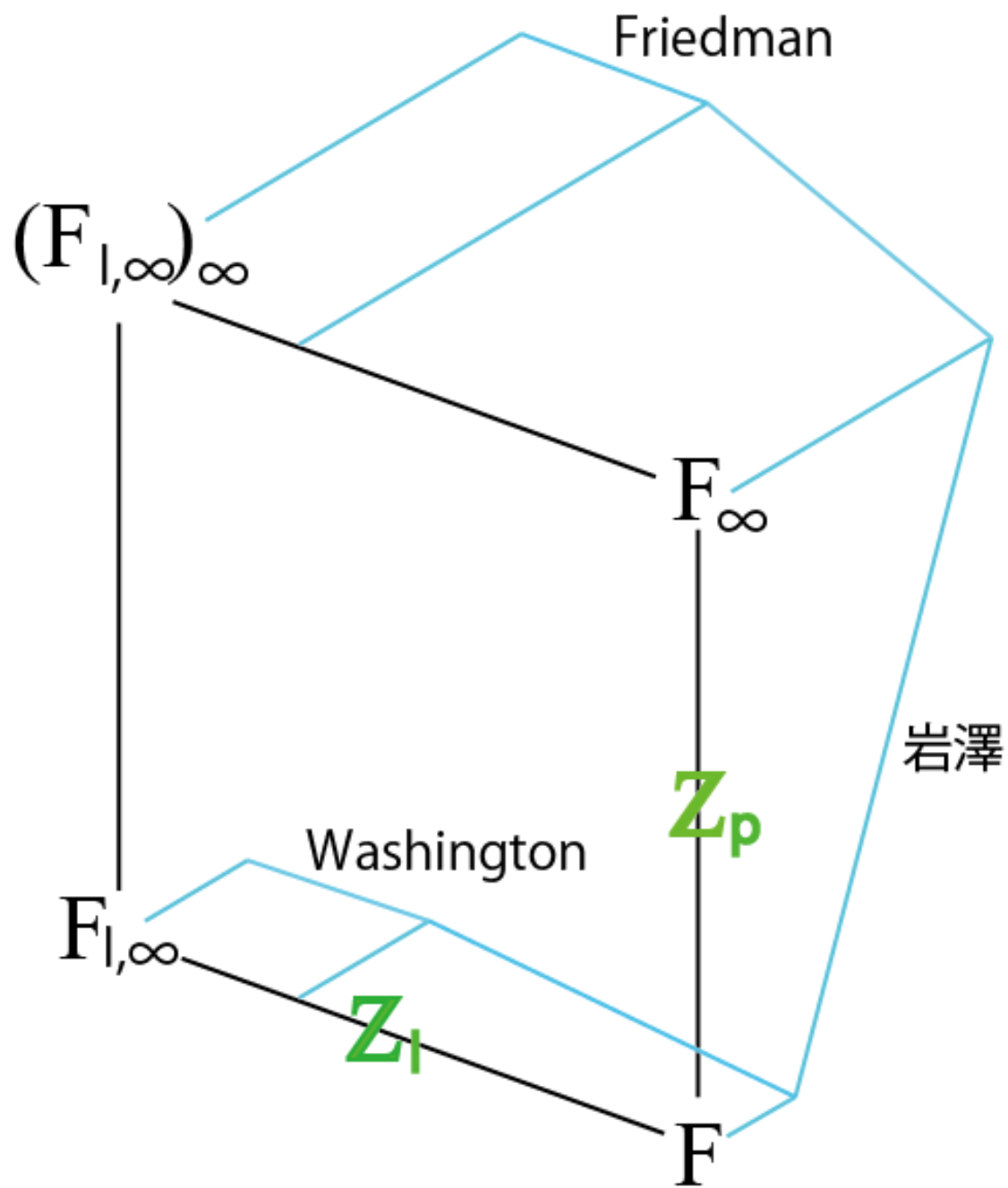
定理 (Washington)

F : アーベル体のとき, $|Cl(F_{l,n})(p)|$ は
十分大きな n で一定となる.

定理 (Friedman)

F : アーベル体のとき, $\lambda_p(F_{l,n}), \nu_p(F_{l,n})$ は
十分大きな n で一定となる.

十分大きな n は, 具体的にどのように与えられるか?



精密な円単数の計算 → 明示版（堀江氏）

円単数の構造＋岩澤主予想 → 明示版の改良（市村氏）

l -分体の最大実部分体に対し，以下の n では一定.

$$n \geq m_{p,l} = n_0 + \left\lfloor \frac{\varphi(l-1) \log(p(l-1)(l-1 - \left\lfloor \frac{l}{3} \right\rfloor)) l^{n_0-1}}{\log l} \right\rfloor$$

定理 ($p = 3$, 市村-中島-高橋)

$$F_l = \mathbf{Q}(\cos \frac{2\pi}{l^{1+\delta}}, \zeta_3), \quad \delta = \begin{cases} 0 & l \neq 2 \\ 1 & l = 2 \end{cases} \quad \text{とする.}$$

$5 \leq l \leq 599$ に対し， $n \geq 0$ において $\lambda_3(F_{l,n})$ は一定である.

$l = 2$ に対しては， $n \geq 3$ において一定である.

さらに，この範囲の全ての $\lambda_3(F_{l,n})$ が決定された.³⁰

l	$3l$	$ord(\psi)$	$n_{3,\psi}$	λ_{ψ^+}	λ_0^-	l	$3l$	$ord(\psi)$	$n_{3,\psi}$	λ_{ψ^+}	λ_0^-
19	57	3	2	2		337	1011	2	1	2	
		9	6	2	16			6	2	2	6
29	87	2	1	1	1	353	1059	2	1	1	
37	111	3	2	2				4	2	1	3
		9	6	2	16	379	1137	3	2	8	
73	219	3	2	2				9	6	8	
		9	6	2	16			27	18	8	208
109	327	2	1	1		397	1191	2	1	1	
		3	2	8				3	2	2	
		6	2	1				6	2	1	
		9	6	8				9	6	2	
		18	6	1				18	6	1	25
		27	18	8		401	1203	2	1	3	
		54	18	1	235			8	2	1	5
113	339	2	1	1	1	433	1299	3	2	8	
127	381	3	2	2				9	6	8	
		9	6	2	16			27	18	8	208
137	411	2	1	1	1	443	1329	13	3	1	3
163	489	3	2	26		449	1347	2	1	1	1
		9	6	26		457	1371	2	1	1	
		27	18	26				6	2	1	3
		81	54	26	2080	461	1383	2	1	1	1
173	519	2	1	1	1	487	1461	3	2	80	
181	543	2	1	2				9	6	80	
		3	2	2				27	18	80	
		6	2	2				81	54	80	
		9	6	2				243	162	80	19360
		18	6	2	34	521	1563	2	1	1	
199	597	3	2	2				26	3	1	4
		9	6	2	16	523	1569	3	2	2	
229	687	2	1	1				9	6	2	16
		6	2	1	3	541	1623	3	2	8	
257	771	2	1	1	1			9	6	8	
271	813	3	2	8				27	18	8	208
		9	6	8		577	1731	3	2	2	
		27	18	8	208			8	2	1	
281	843	20	4	1	4			9	6	2	
307	921	3	2	2				24	6	1	
		9	6	2	16			72	18	1	42
313	939	26	3	1		599	1797	13	3	1	3
		78	9	1	12						

Table 2: $\lambda_0^- \geq 1$ and $\lambda_0^+ = 0$

l	$3l$	d_1	d_2	$B'_0(B_0)$	B'_1	B'_2	d_3	B'_0	B'_1	B'_2	B'_3	B'_4	B'_5	B'_6
19	57	9	1	(1)			1	(1)	(-)					
29	87	2	1	(1)			1	(1)	(-)					
37	111	9	1	(1)			1	(1)	(-)					
73	219	9	1	(1)			9	(1)	(3)	(9)	(-)			
109	327	54	1	(1)			54	(1)	(3)	(9)	(27)	(81)	(-)	
113	339	2	1	(1)			1	(1)	(-)					
127	381	9	1	(1)			1	(1)	(-)					
137	411	2	1	(1)			1	(1)	(-)					
163	489	81	1	(1)			1	(1)	(-)					
173	519	2	1	(1)			1	(1)	(-)					
181	543	18	1	(1)			18	(1)	(3)	(9)	(27)	(-)		
199	597	9	1	(1)			1	(1)	(-)					
229	687	6	6	(3)	(9)	(-)	6	(3)	(9)					
257	771	2	2	(3)	(-)		1	(1)	(-)					
271	813	27	1	(1)			27	(1)	(3,3)	(9,9)	(27,27)	(-)		
281	843	20	1	(1)			1	(1)	(-)					
307	921	9	1	(1)			9	(1)	(3)	(9)	(-)			
313	939	78	1	(1)			6	(1)	(-)					
337	1011	6	1	(1)			6	(1)	(3)	(9)	(-)			
353	1059	4	1	(1)			1	(1)	(-)					
379	1137	27	1	(1)			1	(1)	(-)					
397	1191	18	1	(1)			18	(1)	(3)	(9)	(27)	(81)	(243)	(-)
401	1203	8	8	(3,3)	(-)		1	(1)	(-)					
433	1299	27	1	(1)			1	(1)	(-)					
443	1329	13	1	(1)			1	(1)	(-)					
449	1347	2	1	(1)			1	(1)	(-)					
457	1371	6	1	(1)			6	(1)	(3)	(9)	(-)			
461	1383	2	1	(1)			1	(1)	(-)					
487	1461	243	1	(1)			1	(1)	(-)					
521	1563	26	26	(3,3,3)	(-)		1	(1)	(-)					
523	1569	9	1	(1)			9	(1)	(3,3,3)	(3,9,9)	(-)			
541	1623	27	1	(1)			1	(1)	(-)					
577	1731	72	1	(1)			36	(1)	(3)	(9)	(-)			
599	1797	13	1	(1)			1	(1)	(-)					

$p = 3, l = 587$ のとき, $m_{p,l} = 616$. $l^{m_{p,l}} \approx 10^{1705.5}$
一般ベルヌーイ数を効率よく計算する必要がある.

実アーベル体の Greenberg 予想の確認も厄介.
円単数, p 進 L 関数, 補助素数などを用いる.
拡大次数が p で割れる場合も扱う必要がある.

定理 ($p = 2$, 市村-中島)

$$F_l = \mathbf{Q}(\cos \frac{2\pi}{l}, \zeta_4) \text{ とする.}$$

$3 \leq l \leq 509$ に対し, $n \geq 0$ において
 $\lambda_2(F_{l,n})$ は一定である.

Weber の問題

$\mathbf{Q}$ の各 $\mathbf{Z}_p$ -拡大において, 類数は全て 1 か?

福田, 小松 $\cdots p = 2$ の場合に現れない素数 (合同条件等)

岡崎, 森澤 $\cdots p = 3$ の場合に現れない素数 (合同条件等)

評価の改良.

問題

「類数」: $\psi(p) = 1, |(\mathcal{U}_{M,p}/\mathcal{E}_{M,p})(\psi)| > 1$ による影響を除く.

1. 総実体 F の各 $\mathbf{Z}_p$ -拡大で「類数」は有界か?
2. 総実体 F の任意の $\mathbf{Z}_p$ -拡大で「類数」は有界か?
3. 総実体 F の $\hat{\mathbf{Z}}$ -拡大で「類数」は有界か?

前述のようなランダム性を仮定すると, 1,2 は成立, 3 は不成立?

$$\sum_{x_1 \leq p \leq x_2} (p-2) \frac{1}{p} \frac{1}{p} \approx \log \log x_2 - \log \log x_1$$