円分体の一般 Greenberg 予想と K 群の特殊元

徳島大学　高橋 浩樹

§1　岩澤不変量

§2　K_1 群の特殊元を用いた不変量の計算
（円単数，ガウス和，$\mathbb{Q}(\sqrt{f},\zeta_p)$）

§3　一般 Greenberg 予想と K_2 群
（$\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\zeta_p)$ の $\{c^{(j)}, c^{(2-i-j)}\}$ ）

§1 岩澤不変量

$k/\mathbb{Q}$: 有限次拡大，p: 素数

K/k: $\mathbb{Z}_p$ 拡大 i.e. $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbb{Z}_p$

$k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots \subset K$ s.t. $[k_n : k] = p^n$

A_n: k_n のイデアル類群の p 部分

定理（岩澤）

不変量 $\lambda = \lambda_p(K/k), \mu = \mu_p(K/k), \nu = \nu_p(K/k)$
が存在して，十分大きな全ての n で

$$\sharp A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成立する．

$\tilde{k}$: k の全ての $\mathbb{Z}_p$ 拡大の合成体

単数群に関する Leopoldt 予想 (k,p) (円分体 Ax-Brumer)

$\iff$ $\mathrm{Gal}(\tilde{k}/k) \simeq \mathbb{Z}_p^{r_2(k)+1}$ ($r_2(k)$: 虚素点の個数)

k_∞/k: 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 s.t. $k_\infty \subseteq \bigcup_n k(\zeta_{p^n})$, ζ_n: 1 の原始 n 乗根

μ 不変量

岩澤予想

全ての代数体 k, 素数 p に対し, $\mu_p(k_\infty/k) = 0$.

定理 (Ferrero-Washington)

全ての円分体 k に対し, 予想が成立する.

注 $\mu_p(K/k) > 0$ となる例 (岩澤)

λ 不変量

p: 奇素数，$\overline{\mathbf{Q}} \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$: 固定，$k/\mathbb{Q}$: アーベル拡大，
$\Delta := \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$，($\Delta$ の exponent)$|(p-1)$ とする．
仮定より，指標 $\chi \in \hat{\Delta}$ の値は $\mathbf{Z}_p^\times$ に含まれ，

$$e_\chi := \frac{1}{\sharp\Delta} \sum_{\delta \in \Delta} \chi(\delta)\delta^{-1} \in \mathbb{Z}_p[\Delta].$$

$\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群 M に対し，$M^\chi := e_\chi M$ とする．
$\Delta \simeq \mathrm{Gal}(k_n/\mathbb{Q}_n)$ により，

$$A_n = \bigoplus_{\chi:\text{偶指標}} A_n^\chi \oplus \bigoplus_{\chi:\text{奇指標}} A_n^\chi = A_n^+ \oplus A_n^-$$

と分解され，$\lambda_p^\chi(k_\infty/k), \nu_p^\chi(k_\infty/k)$ が定まる．

$X_\infty^\chi := \varprojlim A_n^\chi$ とすると，$\lambda_p^\chi(k_\infty/k) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} X_\infty^\chi$.

$f_n := lcm\{f_\chi, p^{n+1}\}_{\chi\in\hat{\Delta}}$ に対し，$k_n \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{f_n})$.

$\mathrm{Gal}(k_\infty/k) \simeq \mathbb{Z}_p$ の位相生成元 γ を

その延長 γ' が $\zeta_{f_n}^{\gamma'} = \zeta_{f_n}^{1+f_0}$ となる元とする.

$T := \gamma - 1$ の作用により，X_∞^χ は $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群.

$$X_\infty^\chi \sim \bigoplus_{i=1}^{r} \Lambda/(f_i(T)) \quad \text{(pseudo-isom)}$$

$f_\chi(T) := \prod f_i(T)$.（$f_i(T)$: distinguished 多項式)

χ: 偶指標, $\chi^* := \omega\chi^{-1}$: 奇指標

(ω: Teichmüller 指標, $\omega : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, $\omega(a) \equiv a \mod p$)

$L_p(s,\chi)$: 久保田-Leopoldt の p 進 L 関数.

(+, 偶) $L_p(s,\chi) = G_\chi((1+f_0)^{1-s}-1)$, $s \in \mathbb{Z}_p$ を満たす
$G_\chi(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ が存在し, $G_\chi(T) = g_\chi(T)u_\chi(T)$,
$g_\chi(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$, $u_\chi(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]^\times$ と一意的に表される.

(−, 奇) $L_p(s,\chi) = G_{\chi^*}((1+f_0)^{s}-1)$, $s \in \mathbb{Z}_p$ を満たす
$G_{\chi^*}(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ が存在し, $G_{\chi^*}(T) = g_{\chi^*}(T)u_{\chi^*}(T)$,
$g_{\chi^*}(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$, $u_{\chi^*}(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]^\times$ と一意的に表される.

岩澤主予想（Mazur-Wiles の定理）

奇指標 $\chi^* = \omega\chi^{-1}$ に対し，$f_{\chi^*}(T) = g_{\chi^*}(T)$.

特に，$\lambda_p^{\chi^*}(k_\infty/k) = \deg g_{\chi^*}(T)$.

Greenberg 予想（未解決）

偶指標 χ に対し，$f_\chi(T) = 1$.

即ち，$\lambda_p^{\chi}(k_\infty/k) = 0$.

（主予想より $f_\chi(T) | g_\chi(T)$.）

§2. K_1 群の特殊元を用いた不変量の計算

p : 奇素数, $k = \mathbf{Q}(\sqrt{f}, \zeta_p)$, $k_n = k(\zeta_{p^{n+1}})$

$\chi = \chi_f$: $\mathbf{Q}(\sqrt{f})$ に付随する非自明な Dirichlet 指標

$\omega = \omega_p$: Teichmüller 指標, $\mathrm{Gal}(k_n/\mathbf{Q}_n) \simeq \Delta = \mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q})$

$$A_n = \begin{cases} \bigoplus A_n^{(i)} \quad \oplus \quad \bigoplus A_n^{(p-i)} \cdots & \omega^i, \quad \omega^{p-i}\text{part} \\ \bigoplus A_n^{(\chi,j)} \quad \oplus \quad \bigoplus A_n^{(\chi,p-j)} \cdots & \chi_f\omega^j, \ \chi_f\omega^{p-j}\text{part} \end{cases}$$

偶指標　　　　奇指標

Greenberg 予想（未解決）

全ての p, χ, i, j に対し, $\lambda_p^{(i)} = \lambda_p^{(\chi,j)} = 0.$

Vandiver 予想（未解決）

全ての p, i に対し, $\lambda_p^{(i)} = \nu_p^{(i)} = 0.$ 即ち, $A_n^{(i)} = \{0\}.$

Kummer,..., Buhler, Harvey による計算

$p < 1.63$ 億で以下の等式・不等式が成立.

$$\lambda_p^{(i)} = \nu_p^{(i)} = 0, \quad \lambda_p^{(p-i)} \le 1.$$

疑問 以下の等式・不等式が成立しない例は？

$$\nu_p^{(\chi,j)} = 0, \quad \lambda_p^{(\chi,p-j)} \le 1.$$

例外組 (p,χ,j) の個数の期待値 $(x_1 \le p \le x_2)$

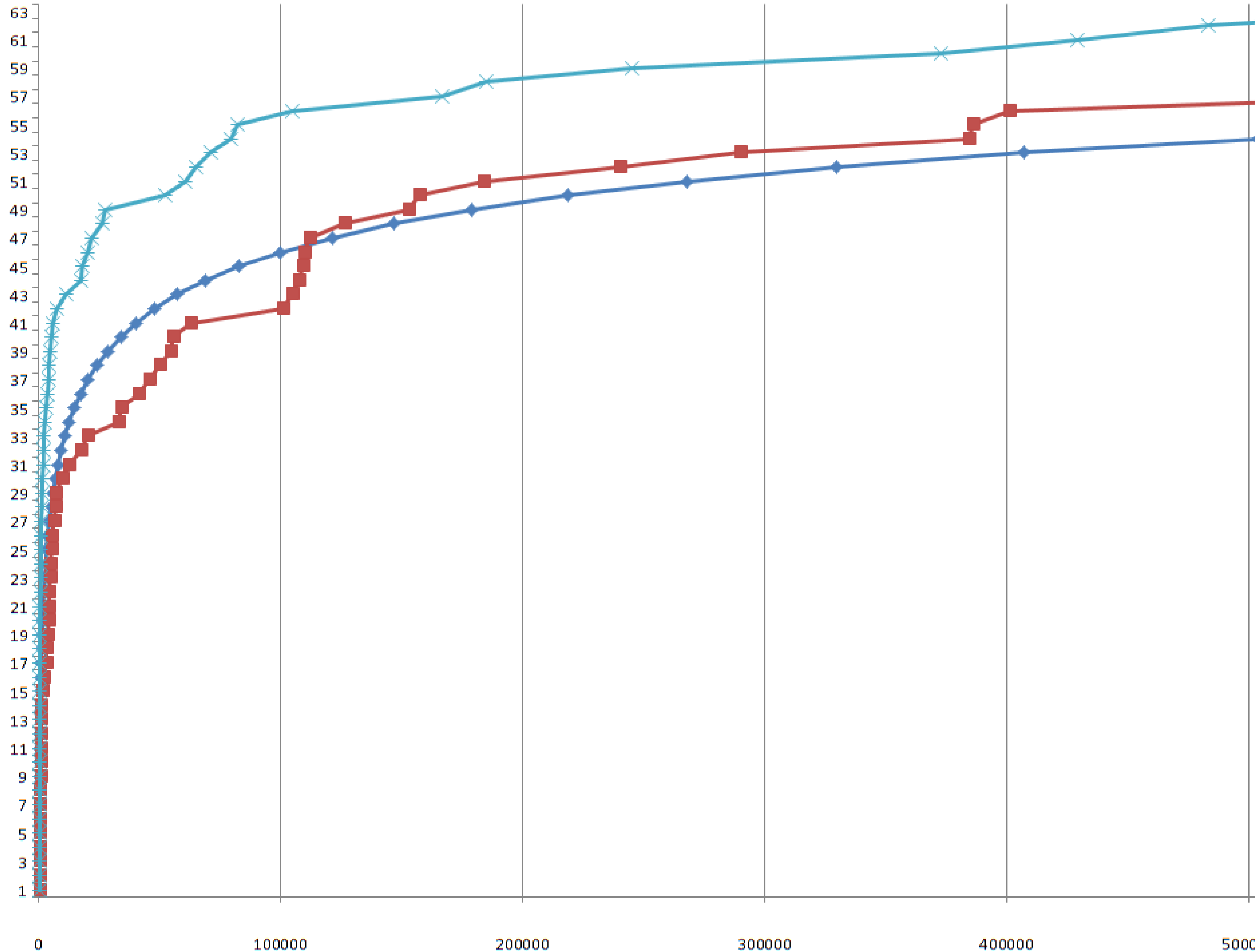
$$E = \sum_{x_1 \le p \le x_2} \frac{p-3}{2}\frac{1}{p}\frac{1}{p} \approx \frac{1}{2}(\log\log x_2 - \log\log x_1).$$

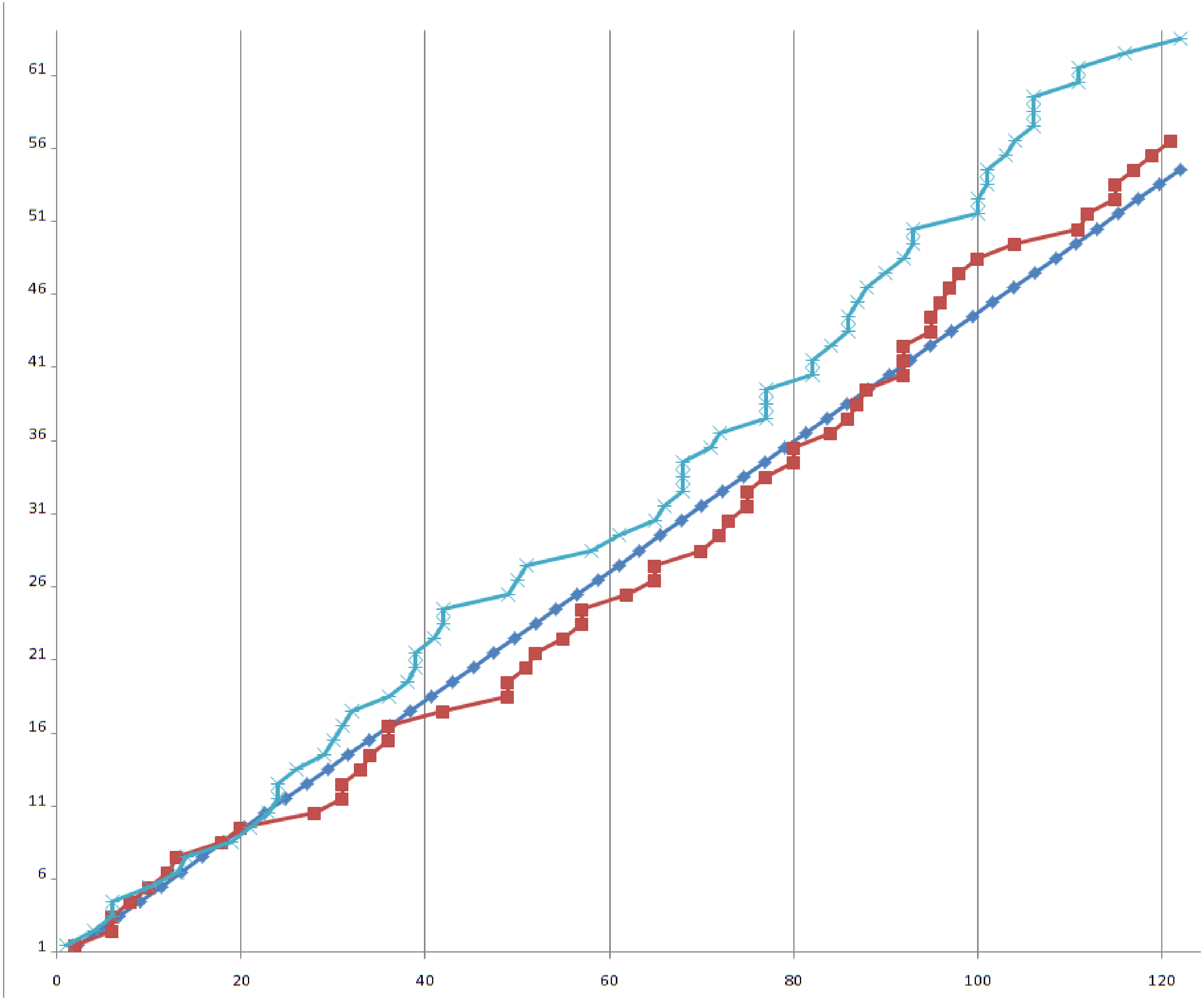
$|f| < 200$: 122 個, $200 \le p \le 500000$, $122 * E \approx \mathbf{54}$.

実験結果 $\nu_p^{(\chi,j)} > 0 \ \cdots\ 56$ 個, $\quad \lambda_p^{(\chi,p-j)} > 1 \ \cdots\ 62$ 個

$p = 401321,\ f = 185,\ j = 205162$ に対し, $\nu_p^{(\chi,j)} > 0.$

$p = 483773,\ f = 33,\ j = 271222$ に対し, $\lambda_p^{(\chi,p-j)} > 1.$





61
56
51
46
41
36
31
26
21
16
11
6
1
0
20
40
60
80
100
120

K_1 群の特殊元を用いた計算法

[I] χ 非正則ペア $(p, \chi\omega^j)$ の探索（一般ベルヌーイ数の母関数）

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} B_{j,\chi}\frac{t^j}{j!} \mod p. \quad \text{(FFT)}$$

[II] 岩澤多項式の係数の計算（p 進 L 関数）

$$L_p(s, \chi\omega^j) = \frac{1}{f_0(s-1)} \sum_{a=1,\ p\nmid a}^{f_0} \chi\omega^j(a)\langle a\rangle^{1-s} \sum_{i=0}^{\infty} {}_{1-s}C_i B_i \left(\frac{f_0}{a}\right)^i .$$

[III] $\lambda_p^{(\chi,j)}=0$, $\nu_p^{(\chi,j)}$ の上界（円単数，素数 l）

$c_n := (1-\zeta_{f_n})^{e_{\chi\omega^j}}$

$Y_n(T)\in\mathbf{Z}[T]$ s.t.

$$Y_n(T)g_{\chi\omega^j}(T)\equiv p^{a_n} \mod ((1+T)^{p^n}-1).$$

ある素イデアル $\mathfrak{L}$，$\mathfrak{L}|l\equiv 1 \mod f_n$ に対し，

$$c_n^{Y_n(T)} \mod \mathfrak{L}\notin((\mathcal{O}_{k_n}/\mathfrak{L})^\times)^{p^{a_n}}$$ を示す．

$$0\to I_\infty^{\chi\omega^j}\to Y_\infty^{\chi\omega^j}\to X_\infty^{\chi\omega^j}\to 0$$

（惰性群，p の外不分岐，不分岐）

Mazur-Wiles の定理より，$g_{\chi\omega^j}(T)=\mathrm{char}_\Lambda Y_\infty^{\chi\omega^j}$．

$c_n^{Y_n(T)} \mod \mathfrak{L}$ の情報から $I_\infty^{\chi\omega^j}\simeq(U_\infty/E_\infty)^{\chi\omega^j}$（$p$ 局所単数/単数）の下界，したがって $X_\infty^{\chi\omega^j}$ の上界を得る．

[IV] $\nu_p^{(\chi,j)}$ の決定（ガウス和，素数 l^*）

$$g_0(\mathfrak{L}) := \left(\sum_{0 \leq s \leq l-2} \zeta_{f_0}^s \zeta_l^{g^s} \right)^{e_{\chi\omega^{p-j}}}$$

g は $\mathbb{F}_l^\times$ の生成元，$\zeta_{f_0}^s \equiv g^{s(l-1)/f_0} \mathrm{mod} \mathfrak{L}$.

ある素イデアル $\mathfrak{L}^*$，$\mathfrak{L}^* | l^* \equiv 1 \mod l f_0$ に対し，

$g_0 \mod \mathfrak{L}^* \notin ((\mathcal{O}_{k_0}/\mathfrak{L}^*)^\times)^{p^{a_0^*}}$ を示す

(FFT，中山の補題)

[III] で用いた l について，$g_0(\mathfrak{L}) \mod \mathfrak{L}^*$ の情報から l を用いることの正当性を確認し，$X_\infty^{\chi\omega^j}$ の位数を得る．

§3 一般 Greenberg 予想と K_2 群

p: 素数，$\tilde{k}/k$: $\mathbb{Z}_p^d$ 拡大 （k にとって最大の d)

$k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n \subset \cdots \subset \tilde{k}$

s.t. $\mathrm{Gal}(k_n/k) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$

A_n: k_n のイデアル類群の p 部分，$X_\infty := \varprojlim A_n$.

$\mathrm{Gal}(\tilde{k}/k) = \overline{\langle \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_d \rangle} \simeq \mathbb{Z}_p^d$. $T_i := \gamma_i - 1$ の作用により，X_∞ は $\tilde{\Lambda} := \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2, ..., T_d]]$ 加群.

一般 Greenberg 予想（未解決）

$X_\infty \sim 0$ (pseudo-null $\tilde{\Lambda}$ 加群)

i.e. $\mathrm{ht}_{\tilde{\Lambda}}(\mathrm{Ann}_{\tilde{\Lambda}} X_\infty) \geq 2$.

注 1 $d=1$ となるのは総実体 k であり，pseudo-null $\mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群は有限群なので，$\lambda_p(k_\infty/k)=\mu_p(k_\infty/k)=0$ という予想となる.

注 2 一般の $\mathbb{Z}_p^r$ 拡大に対し，$\Lambda:=\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2,...,T_r]]$ として，$\mathrm{ht}_\Lambda(\mathrm{Ann}_\Lambda X_\infty)\geq 1$, i.e. X_∞ は torsion Λ 加群 (Greenberg), 類数公式 $\sharp A_n=p^{(ln+mp^n+O(1))p^{(r-1)n}}$ $(n\gg 0)$ (Cuoco-Monsky).

$\underline{k = \mathbf{Q}(\zeta_{\mathbf{p}})}$

p 単数のカップ積（K_2 群の元）

$A_0^+ = 0$ （Vandiver 予想）とする.

$E'_{k,p} := \mathcal{O}_k[1/p]^\times/(\mathcal{O}_k[1/p]^\times)^p$

$\kappa'_p : E'_{k,p} \times E'_{k,p} \to A_k/pA_k \otimes \boldsymbol{\mu}_p \quad (\boldsymbol{\mu}_p = \langle \zeta_p \rangle)$

$(H^1(G_{k,p}, \boldsymbol{\mu}_p) \times H^1(G_{k,p}, \boldsymbol{\mu}_p) \to H^2(G_{k,p}, \boldsymbol{\mu}_p) \otimes \boldsymbol{\mu}_p)$

$$\kappa'_{p,i} : \bigoplus_j (E'_{k,p})^{(j)} \times (E'_{k,p})^{(2-i-j)} \to (A_k/pA_k)^{(1-i)} \otimes \boldsymbol{\mu}_p$$

$$(c^{(j)}, c^{(2-i-j)}) \qquad \mapsto e_{i,j} := \langle c^{(j)}, c^{(2-i-j)} \rangle_i$$

K_2 群とコホモロジー群

$$K_2^M(O_k[1/p])$$
$$= (O_k[1/p]^\times \otimes O_k[1/p]^\times)/\langle a \otimes (1-a) | a, 1-a \in O_k[1/p]^\times \rangle$$

$$\begin{array}{ccc}
e'_{i,j} \in K_2^M(O_k[1/p])/p & \xrightarrow{\kappa_p} & K_2(O_k[1/p])/p \\
& \kappa'_p \searrow & -c_p \downarrow \wr \\
& & H^2(G_{k,p}, \boldsymbol{\mu}_p^{\otimes 2}) \ni e_{i,j}
\end{array}$$

$$e'_{i,j} := \{c^{(j)}, c^{(2-i-j)}\}_i \qquad \mapsto \qquad \langle e_{i,j} := c^{(j)}, c^{(2-i-j)} \rangle_i$$

具体的な関係式

素数 p, 偶数 i を固定し，偶数 j に対し $x_j = e'_{i,j}$, $j' = 2-i-j$ と表す.

(1) $x_j + x_{j'} = 0$. (anti-symmetry)

$\because O_k[1/p]^\times \supset \{1 - st^{-1} | s \in S,\ t \in S \cup \{1\}\}$, $S = \{(1-\zeta_p^i) | 1 \le i < p\}$.

(2) $3 \le a \le p-1$ に対し,

$$\sum_{偶\ j=0}^{p-3} (a^j + 1 - 2^j)((2a-2)^{j'} + 1 - (a-1)^{j'} - 2^{j'})x_j = 0.$$

$$\because \{\rho_a, \rho_{a-1}\} = \left\{ \frac{(1-\zeta_p^a)(1-\zeta_p)}{1-\zeta_p^2}, \frac{(1-\zeta_p^{2a-2})(1-\zeta_p)}{(1-\zeta_p^{a-1})(1-\zeta_p^2)} \right\} = 0,$$

ただし $\rho_a = \dfrac{1-\zeta_p^a}{1+\zeta_p}$.

定理（McCallum-Sharifi）

$r_p := \dim_{\mathbb{F}_p} A_0^- / pA_0^-$.（非正則指数）

$s_p := \sharp\{j \mid e_{i,j} \neq 0,$ 全ての非自明部分 $i\}$

（円単数のカップ積が非自明となる総数）

$$\mathrm{ht}_{\tilde{\Lambda}}(\mathrm{Ann}_{\tilde{\Lambda}} X_\infty) \geq \frac{s_p}{r_p^2 - r_p + 1} + 1.$$

(r_p, s_p) のデータより $p < 1000$ で一般 Greenberg 予想成立.

計算方法

(1) ベルヌーイ数の母関数 mod p より非正則指数 r_p を求める.

(2)Hecke 環の Eisenstein イデアルの計算から $e_{i,0} \neq 0$ を示す.

(3) 各 i に対し $e'_{i,0}, e'_{i,2}, \ldots e'_{i,p-3}$ の関係式から s_p を求める.

p 分体での $\mathbf{r_p}$ の分布 $(p < 2^{15})$

r_p	0	1	2	3	4	≥ 5
$\sharp$	2134	1056	276	44	2	0

p 分体の $\mathbf{s_p}$ の分布

$$s_p \geq \frac{p-1}{2} - \sum_{i:\text{非自明}} z_{p,i}, \qquad z_{p,i} := \sharp\{j \mid e_{i,j} = 0\}.$$

McCallum-Sharifi の予想

全ての p, i に対して，$\kappa_{p,i}$ は全射.

以下はこの種の予想を仮定し，$z_{p,i} = z'_{p,i} := \sharp\{j \mid e'_{i,j} = 0\}$ が示せる場合.

p 分体の $\mathbf{z}'_{\mathbf{p},\mathbf{i}}$ の分布 $(p < 2^{15})$ $e'_{i,j} := \{c^{(j)}, c^{(2-i-j)}\}_i = 0$

(p,i)mod 4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sharp$(1,0)	0	0	349	0	89	0	14	0	0	0	0
$\sharp$(1,2)	0	0	0	0	307	0	93	0	10	0	2
$\sharp$(3,0)	0	0	0	331	0	81	0	12	0	0	0
$\sharp$(3,2)	0	0	0	369	0	80	0	10	0	1	0

$$z'_{p,i} = 2z''_{p,i} + 2 + \begin{cases} 0 & (p,i) \equiv (1,0) \mod 4 \\ 2 & (p,i) \equiv (1,2) \mod 4 \\ 1 & (p,i) \equiv (3,*) \mod 4 \end{cases}$$

other, index, self

$$\{c^{(j)}, c^{(2-i-j)}\}_i = -\{c^{(2-i-j)}, c^{(j)}\}_i$$

z'' の分布は，$P(e'_{i,j} = 0) = 1/p$ とする分布に近い．

k	0	1	2	3	sum
$\sharp z'' = k$	1356	343	46	3	1748
ratio	0.776	0.196	0.026	0.0017	1
$Po(\lambda = 1/4)$	0.779	0.195	0.024	0.0020	1

(101, 68)

1, 84, 84, 89, 35, 29, 48, 15, 70, 31, 86, 53, 72, 66, 12, 17, 17, 100, 45, 61, 5, 75, 38, **0** (46), 40, 20, 30, 66, 9, 28, 37, 95, 13, **0** (66), **0** (68), 88, 6, 64, 73, 92, 35, 71, 81, 61, **0** (88), 63, 26, 96, 40, 56

other (46)-(88), index (68)-(66)

(379, 100)

1, 97, ..., 279, 159, **0** (100), 258, 239, ..., 206, 168, **0** (140), 211, 173, ..., 140, 121, **0** (180), 220, 100, ..., 140, 206

index (100)-(180), self (140)

$\mathbf{k} = \mathbf{Q}(\zeta_{4p}) = \mathbf{Q}(\sqrt{-4}, \zeta_p),\ \chi = \chi_{-4}$

4p 分体の $\mathbf{r}_{p,\chi}$ の分布 $(p < 2^{15})$

$r_{p,\chi}$	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$\sharp$	2133	1062	270	40	6	1	0

4p 分体の $\mathbf{s}_{p,\chi}$ の分布

(i) $\kappa_{p,\chi,i} : \bigoplus_j (E'_{k,p})^{(\chi,j)} \times (E'_{k,p})^{(\chi,2-i-j)} \to (A_k/pA_k)^{(1-i)} \otimes \langle \zeta_p \rangle$

$$e'_{\chi,i,j} := \{c^{(\chi,j)}, c^{(\chi,2-i-j)}\}_i \mapsto e_{\chi,i,j} := \langle c^{(\chi,j)}, c^{(\chi,2-i-j)} \rangle_i$$

(ii) $\kappa_{p,\chi,j} : \bigoplus_i (E'_{k,p})^{(\chi,i)} \times (E'_{k,p})^{(2-j-i)} \to (A_k/pA_k)^{(\chi,1-j)} \otimes \langle \zeta_p \rangle$

$$e'_{\chi,j,i} := \{c^{(\chi,i)}, c^{(2-j-i)}\}_{\chi,j} \mapsto e_{\chi,j,i} := \langle c^{(\chi,i)}, c^{(2-j-i)} \rangle_{\chi,j}$$

(i) 4p 分体の $\mathbf{z}'_{\mathbf{p},\chi,\mathbf{i}}$ の分布 $(p < 2^{15})$ $\quad e'_{\chi,i,j} := \{c^{(\chi,j)}, c^{(\chi,2-i-j)}\}_i = 0$

(p,i)mod 4	0	1	2	3	4	5	6	7	8
♯(1,0)	0	0	343	0	98	0	10	0	1
♯(1,2)	327	0	77	0	6	0	2	0	0
♯(3,0)	0	312	0	99	0	12	0	1	0
♯(3,2)	0	364	0	82	0	13	0	1	0

$$z'_{p,\chi,i} = 2z''_{p,\chi,i} + \begin{cases} 2 & (p,i) \equiv (1,0) \mod 4 \\ 0 & (p,i) \equiv (1,2) \mod 4 \\ 1 & (p,i) \equiv (3,*) \mod 4 \end{cases}$$

other, self

z'' の分布は，$P(e'_{\chi,i,j} = 0) = 1/p$ とする分布に近い．

k	0	1	2	3	sum
$\sharp z'' = k$	1346	356	41	5	1748
ratio	0.770	0.203	0.023	0.0028	1
$Po(\lambda = 1/4)$	0.779	0.195	0.024	0.0020	1

(ii) 4p 分体の $\mathbf{z'_{p,\chi,j}}$ の分布 ($p < 2^{15}$)

$e'_{\chi,j,i} := \{c^{(\chi,i)}, c^{(2-j-i)}\}_{\chi,j} = 0$, $\{c^{(2-j-i)}, c^{(\chi,i)}\}_{\chi,j} = -e'_{\chi,j,i} = 0$

(p,j)mod 4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sharp$(1,1)	0	0	240	0	134	0	27	0	7	0	1	0	0
$\sharp$(1,3)	0	0	267	0	128	0	30	0	8	0	1	0	0
$\sharp$(3,1)	0	0	275	0	151	0	29	0	6	0	2	0	1
$\sharp$(3,3)	0	0	277	0	125	0	30	0	7	0	0	0	0

$$z'_{p,\chi,j} = 2z''_{p,\chi,j} + 2$$

other, index

z'' の分布は，$P(e'_{\chi,j,i} = 0) = 1/p$ とする分布に近い．

k	0	1	2	3	4	5	sum
$\sharp z'' = k$	1059	538	116	28	4	1	1746
ratio	0.607	0.308	0.066	0.016	0.0023	0.00057	1
$Po(\lambda = 1/2)$	0.607	0.303	0.076	0.013	0.0015	0.00015	1

(i) (379, 100)

2, 98, . . . , 330, 137, **0** (317), 212, 13, 262, 310, 227, **0** (329), 152, 69, 117, 366, 167, **0** (341), 242, 49, . . . , 45, 5

other (317)-(341), self (329)

(i) (379, 174)

306, 29, . . . , 193, 121, **0** (103), 258, 186, . . . , 255, 225, **0** (267), 89, 32, . . . , 347, 290, **0** (317), 154, 124, . . . , 36, 141

other (317)-(267), self (103)

問： $\sharp K_{2m+2}(\mathbb{Z}[i])(p)^{\chi} \neq 1$ となる

1000 万以下の奇素数 p，偶数 m は？

答： $p = 379, m = 60$

（この範囲で $\nu_p^+ > 0$ となる唯一の例外素数）