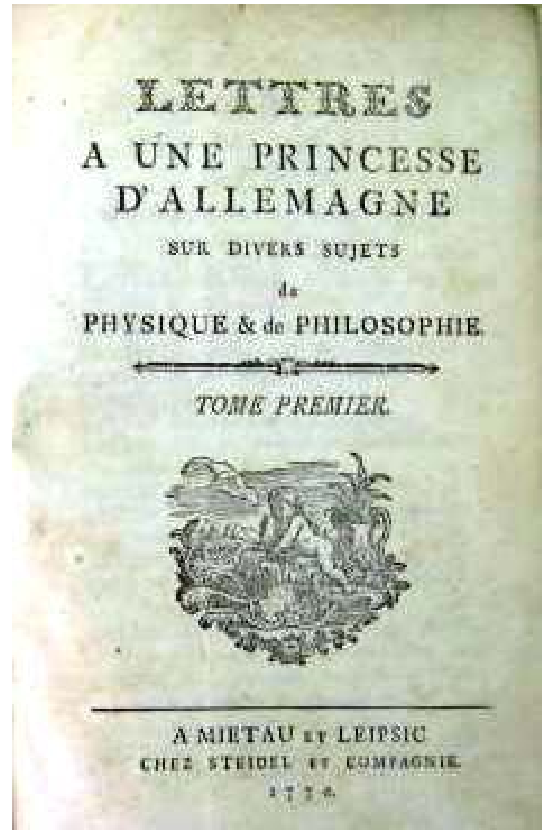
オイラーの数学と『ドイツ公女への手紙』



LETTRES
A UNE PRINCESSE
D'ALLEMAGNE
SUR DIVERS SUJETS
de
PHYSIQUE & de PHILOSOPHIE

TOME PREMIER.

A MIETAU ET LEIPSIC
CHEZ STEIDEL ET COMPAGNIE.

広島大学大学院理学研究科
高橋浩樹

オイラー（1707－1783）

「18世紀の大半にわたりオイラーが占め続けたがごとき，純粋，応用を問わぬ数学の全分野で異論の余地のない指導的地位に立った数学者は他にいたことがない．」

（ヴェイユ 『数論　歴史からのアプローチ』）

広く読まれた主要著書

『無限解析入門』（1748年出版，41歳頃）

無限解析による解析学の基礎

『ドイツ公女への手紙』（1768年出版，61歳頃）

数式なしで自然科学・哲学を解説

仮説の概略

・これらの2著書は一見何のつながりもないが，実は密接に関係し合っているのではないか．

・ゼータ関数についての先駆的な論文『ベキ乗と逆数のベキ乗級数の美しい関係』（1749年著述，1768年出版）が両者を結びつけるのでは？

１．調査の動機と『美しい関係』
２．『無限解析入門』の大量の誤差
３．『ドイツ公女への手紙』

１．調査の動機と『美しい関係』

整数論の一理論である岩澤理論の源流は
どこまでさかのぼれるのか？

クンマー（1850年頃）　ベルヌーイ数
リーマンゼータ関数の特殊値（解析的対象）
｜
円分体のイデアル類群の位数（代数的対象）

岩澤主予想（1960年代～，1984年メイザー＆ワイルズ）
$\mathbf{Z}_p$-拡大という無限次拡大の代数体を考察することによって，精密な等式を得ることができる．

リーマンゼータ関数

$$\zeta(x)=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots \qquad (x>1)$$

の解析接続

リーマンゼータ値　k : 正の偶数　$\zeta(k)=\frac{2^{k-1}}{k!}|B_k|\pi^k,\quad \zeta(1-k)=-\frac{B_k}{k}.$

ベルヌーイ数

$$B_0=1 \quad B_1=\frac{1}{2} \quad B_2=\frac{1}{6} \quad B_4=-\frac{1}{30} \quad B_6=\frac{1}{42} \quad B_8=-\frac{1}{30} \quad B_{10}=\frac{5}{66}$$

$$B_{12}=-\frac{691}{2730} \quad B_{14}=\frac{7}{6} \quad B_{16}=-\frac{3617}{510} \quad B_{18}=\frac{43867}{798} \quad B_{20}=-\frac{174611}{330}$$

$$B_{22}=\frac{854513}{138} \quad B_{24}=-\frac{236364091}{2730} \quad B_{26}=\frac{8553103}{6} \quad B_{28}=-\frac{23749461029}{870}$$

$$B_{30}=\frac{8615841276005}{14322} \quad B_{32}=-\frac{7709321041217}{510} \quad B_{34}=\frac{2577687858367}{6}$$

岩澤主予想⇒691円分体のイデアル類群の691部分の691-12=679方向は自明ではない.

ゼータ値の分子に691が出現することを最初に記述したのは誰か？

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\ \text{etc.}=\frac{p^2}{6}=P$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}\ \text{etc.}=\frac{p^4}{90}=Q$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}\ \text{etc.}=\frac{p^6}{945}=R$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}\ \text{etc.}=\frac{p^8}{9450}=S$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}\ \text{etc.}=\frac{p^{10}}{93555}=T$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}\ \text{etc.}=\frac{691\,p^{12}}{6825\cdot 93555}=V.$$

オイラー（E41　1735年著述，1740年出版）

正則素数　:ζ(1-k)たちの分子に現れない素数

非正則素数 :ζ(1-k)たちの分子に現れる素数

0≦ k≦p-3でいったん出現すれば,

p-1の周期で無限回出現する.

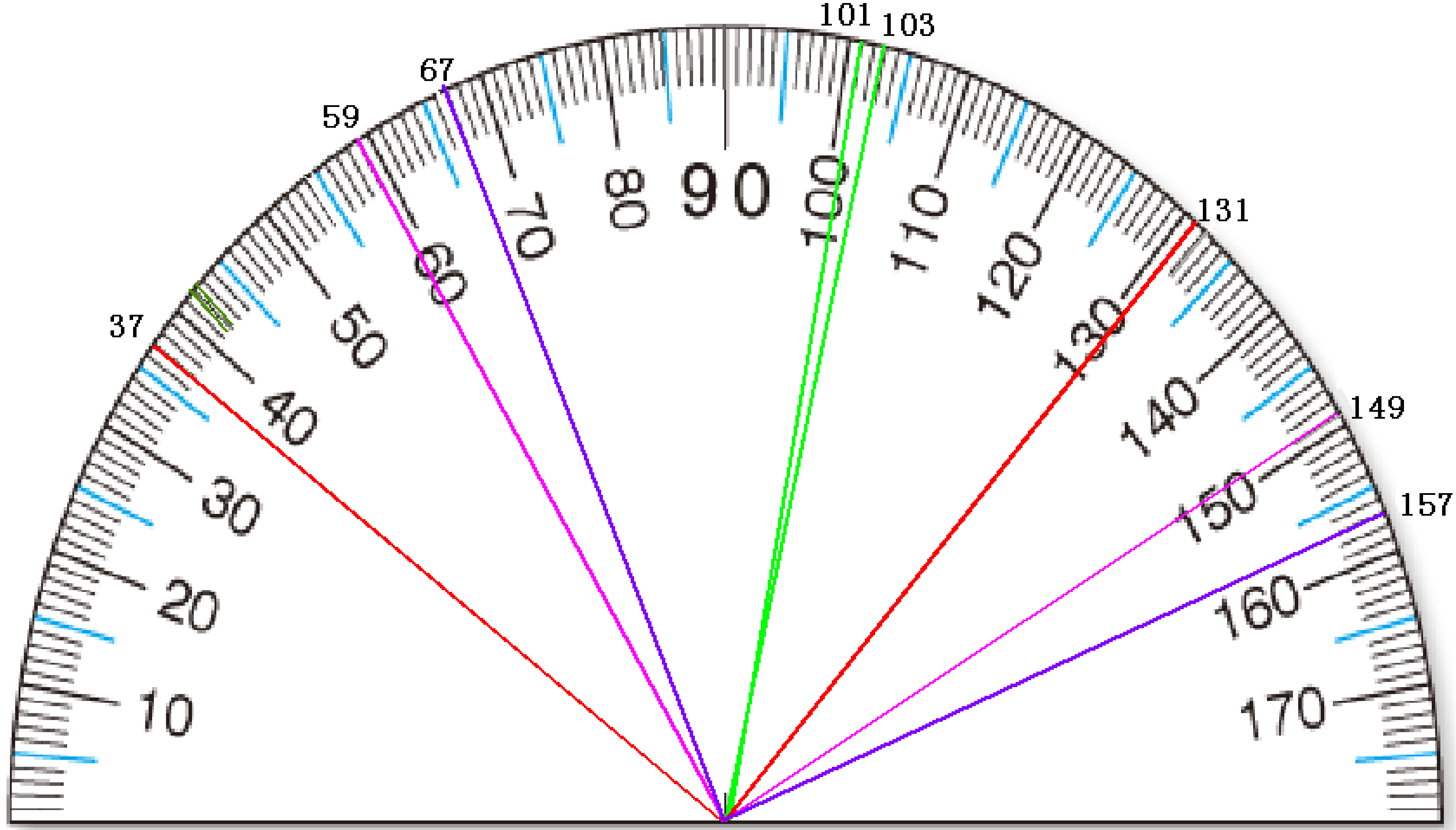
正則素数:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,41,43,.......,97,..........

非正則素数:

37,59,67,101,103,131,149,157,157,233,....,691,...........

（クンマーの合同式および計算）



101
103
67
59
131
37
149
157
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170

E352『美しい関係』の第1ページ

REMARQUES

SUR UN BEAU RAPPORT ENTRE LES SÉRIES DES PUISSANCES TANT DIRECTES QUE RÉCIPROQUES.

PAR M. L. EULER *). 注）1749年に著述

I.

Le rapport, que je me propoſe de développer ici, regarde les ſommes de ces deux ſéries infinies générales:

$$\odot \; . \; 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \&c.$$

$$☽ \; . \; \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \&c.$$

太陽と月の記号

『美しい関係』における成果

Ａ．関数等式･･･美しい関係

太陽と月のゼータの美しい関係

Ｂ．特殊値の計算

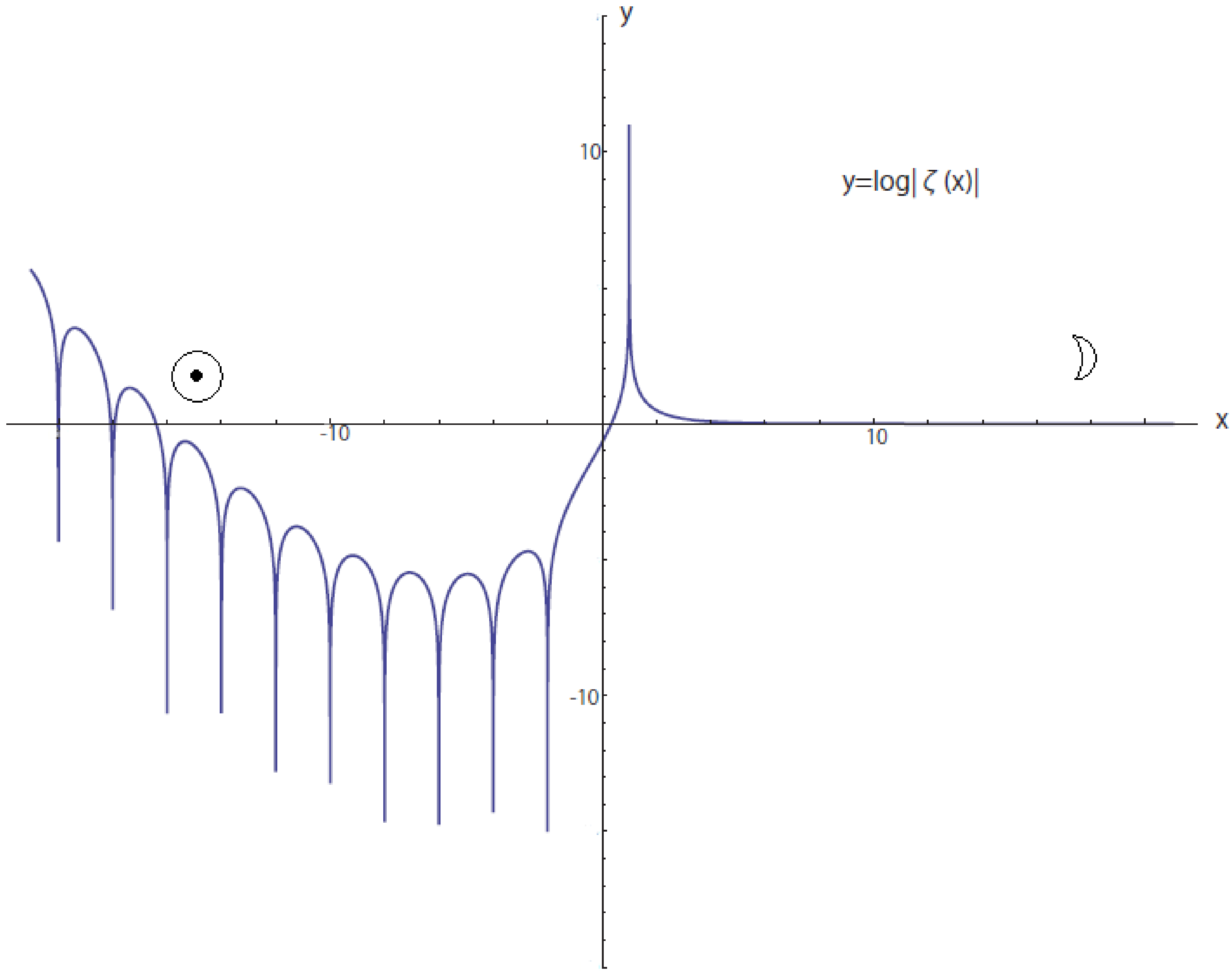
$\zeta(2)$ ～$\zeta(34)$　 17個の値

$\zeta(-1)$～$\zeta(-33)$ 17個の値

A. 関数等式・・・美しい関係

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \&c.}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \&c.} = \frac{-1.\,2.\,3.\,\ldots\,(n-1)\,(2^{n}-1)}{(2^{n-1}-1)\,\pi^{n}} \cos.\,\frac{n\pi}{2}.$$

級数値の高速な近似計算法である
オイラー・マクローリン法から関係を
発見している.


y
x
10
-10
-10
10
y=log| ζ (x)|

B. 特殊値の計算

4. Des féries de l'autre efpece ☽ on n'a connu autrefois que celle du cas $n = 1$, ou de celle-ci

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \&c.$$

dont la fomme eft $l2$, jufques à ce que j'ai trouvé la fomme de la férie réciproque des quarrés, & enfuite de toutes les autres puiffances paires: ayant demontré que les fommes de toutes ces féries dépendent du rapport de la circonférence d'un cercle π à fon diametre 1.

Car fuppofant les fommes de ces féries	j'ai trouvé
$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. = A\pi^2$	$A = \frac{1}{6}$,
$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = B\pi^4$	$B = \frac{2}{5}A^2$,
$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \&c. = C\pi^6$	$C = \frac{4}{7}AB$,
$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c. = D\pi^8$	$D = \frac{4}{9}AC + \frac{2}{9}B^2$,
$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \&c. = E\pi^{10}$	$E = \frac{4}{11}AD + \frac{4}{11}BC$,
&c.	&c.

d'où je conclus pour les féries de notre feconde efpece, en faifant varier alternativement les fignes

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \&c. = \frac{2-1}{2^1}A\pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \&c. = \frac{2^3-1}{2^3}B\pi^4$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \&c. = \frac{2^5-1}{2^5}C\pi^6$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \&c. = \frac{2^7-1}{2^7}D\pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \&c. = \frac{2^9-1}{2^9}E\pi^{10}$$

$$1 - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} - \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} - \frac{1}{6^{12}} + \&c. = \frac{2^{11}-1}{2^{11}}F\pi^{12},$$

&c.

Or, pour les cas où n eft un nombre impair, toutes mes recherches pour en trouver les fommes, ont été inutiles jufques ici. Cependant il eft certain qu'elles ne dépendent point d'une maniere femblable des puiffances pareilles du nombre π. Peut-être que les réflexions fuivantes y répandront quelque jour.

5. Puisque les nombres A, B, C, D, &c. font de la derniere importance dans ce fujet, je les mettrai ici auffi loin, que je les ai calculés.

$$A = \frac{2^0 .\ 1}{1.2.3},$$

$$B = \frac{2^2 .\ 1}{1.2\ldots5 .\ 3},$$

$$C = \frac{2^4 .\ 1}{1.2\ldots7 .\ 3},$$

$$D = \frac{2^6 .\ 3}{1.2\ldots9 .\ 5},$$

$$E = \frac{2^8 .\ 5}{1.2\ldots11 .\ 3},$$

$$F = \frac{2^{10} .\ 691}{1.2\ldots13 .\ 105},$$

$$G = \frac{2^{12} .\ 35}{1.2\ldots15 .\ 1},$$

$$H = \frac{2^{14}.\ 3617}{1.2\ldots17.15},$$

$$I = \frac{2^{16}.\ 43867}{1.2\ldots19.21},$$

$$K = \frac{2^{18}.\ 1222277}{1.2\ldots21.55},$$

$$L = \frac{2^{20}.\ 854513}{1.2\ldots23.3},$$

$$M = \frac{2^{22}.\ 1181820455}{1.2\ldots25.273},$$

$$N = \frac{2^{24}.\ 76977927}{1.2\ldots27.1},$$

$$O = \frac{2^{26}.\ 23749461029}{1.2\ldots29.15},$$

$$P = \frac{2^{28}.\ 8615841276005}{1.2\ldots31.231},$$

$$Q = \frac{2^{30}.\ 84802531453387}{1.2\ldots33.85},$$

$$R = \frac{2^{32}.\ 90219075042845}{1.2\ldots35.3}.$$

6. Or c'eſt auſſi de ces mêmes nombres A, B, C, D, &c. que dépend la ſommation des ſéries de la premiere eſpece ⊙ dans les cas, où l'expoſant m eſt un nombre impair, ayant déja vu que, lorsque cet expoſant eſt un nombre pair, la ſomme devient égale à zéro. Mais il faut employer une méthode toute particuliere pour démontrer cette harmonie. Pour cet effet, il faut recourir à la méthode générale que j'ai donnée autrefois pour déterminer les ſommes des ſéries

34までのゼータ値
「これまで計算した限りの数をここに記す」

最小の非正則素数p=37
はQの分子の素因数.
34＝p－3まで計算した
素晴らしいリスト！

E212『微分計算教程』（1748年著述，1755年出版）
30番目までのベルヌーイ数の不完全な素因数分解

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$
$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$
$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$
$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$
$$\frac{\varepsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$
$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$
$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$
$$\frac{\theta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$
$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{798} = \mathfrak{I}$$
$$\frac{\varkappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283.617}{330}$$
$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11.131.593}{2.3.23}$$
$$\frac{\mu}{25} = \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{M} \quad 103.2294797$$
$$\frac{\nu}{27} = \frac{8553103}{6} = \mathfrak{N} = \frac{13.657931}{6}$$
$$\frac{\xi}{29} = \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{O} \quad 9349.362903$$
$$\frac{\pi}{31} = \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{P} \quad 5.1721.1061259881$$

&c.

分母の素因数は予測可能
分子の素因数は予測困難

奇妙な記述

・『美しい関係』における太陽と月の表示.

著述前年の金環日食の観測. なぜ19年後に出版？

・最初のゼータ値のリストにおける値の表示.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.} = \frac{p^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc.} = \frac{691\,p^{12}}{6825 \cdot 93555} = V.$$

?

691は125番目の素数.　125=5・5・5

２.『無限解析入門』の大量の誤差

第1巻　７つのリストに集中（約7０個）
第2巻　最終2章に集中（約１０個）

・切捨てと四捨五入の違いでは説明できない.
・極めて低いレベルの計算ミスがある.
・リスト間に統一がとれていない.

PO $\log_{10}5$の計算　$\log(ab)^{1/2}=(\log a+\log b)/2$

LIB. I.	A	$=$ 1, 000000;0	lA	$=$ 0, 0000000 0		fit
	B	$=$ 10, 000000;0	lB	$=$ 1, 0000000;0	C	$=\sqrt{AB}$
	C	$=$ 3, 162277;7	lC	$=$ 0, 5000000;0	D	$=\sqrt{BC}$
	D	$=$ 5, 623413;3	lD	$=$ 0, 7500000;0	E	$=\sqrt{CD}$
	E	$=$ 4, 216964;5	lE	$=$ 0, 6250000;0	F	$=\sqrt{DE}$
	F	$=$ 4, 869674;5	lF	$=$ 0, 6875000;0	G	$=\sqrt{DF}$
	G	$=$ 5, 232991;1	lG	$=$ 0, 7187500;0	H	$=\sqrt{FG}$
	H	$=$ 5, 048065;5	lH	$=$ 0, 7031250;0	I	$=\sqrt{FH}$
	I	$=$ 4, 958069;8	lI	$=$ 0, 6953125;5	K	$=\sqrt{HI}$
	K	$=$ 5, 002865;4	lK	$=$ 0, 6992187;7	L	$=\sqrt{IK}$
	L	$=$ 4, 980416;6	lL	$=$ 0, 6972656;6	M	$=\sqrt{KL}$
	M	$=$ 4, 991627;7	lM	$=$ 0, 6982421;1	N	$=\sqrt{KM}$
	N	$=$ 4 997242;3	lN	$=$ 0, 6987304;4	O	$=\sqrt{KN}$
	O	$=$ 5, 000052;3	lO	$=$ 0, 6989745;6	P	$=\sqrt{NO}$
	P	$=$ 4, 998647;7	lP	$=$ 0, 6988525;5	Q	$=\sqrt{OP}$
	Q	$=$ 4, 999350;0	lQ	$=$ 0, 6989135;5	R	$=\sqrt{OQ}$
	R	$=$ 4, 999701;1	lR	$=$ 0, 6989440;0	S	$=\sqrt{OR}$
	S	$=$ 4, 999876;7	lS	$=$ 0, 6989592;3	T	$=\sqrt{OS}$
	T	$=$ 4, 999963;5	lT	$=$ 0, 6989668;9	V	$=\sqrt{OT}$
	V	$=$ 5, 000008;9	lV	$=$ 0, 6989707;7	W	$=\sqrt{TV}$
	W	$=$ 4, 999984;7	lW	$=$ 0, 6989687;8	X	$=\sqrt{WV}$
	X	$=$ 4, 999997;8	lX	$=$ 0, 6989697;8	Y	$=\sqrt{VX}$
	Y	$=$ 5, 000003;3	lY	$=$ 0, 6989702;3	Z	$=\sqrt{XY}$
	Z	$=$ 5, 000000;0	lZ	$=$ 0, 6989700;0		

p.77　$\log_{10}2=0.3010300$ 2999,　$\log_2 10=3.3219277$ 80

P１　Log　n　第7章

E X E M P L U M.

Hinc Logarithmi hyperbolici numerorum ab 1 uſque ad 10 ita ſe habebunt, ut ſit

$l1$	$=$	0,	00000	00000	00000	00000	00000		
$l2$	$=$	0,	69314	71805	59945	30941	72321		
$l3$	$=$	1,	09861	22886	68109	69139	52452		
$l4$	$=$	1,	38629	43611	19890	61883	44642		
$l5$	$=$	1,	60943	79124	34100	37460	07593		
$l6$	$=$	1,	79175	94692	28055	00081	24773		
$l7$	$=$	1,	94591	01490	55313	30510	54639	53527	1112
$l8$	$=$	2,	07944	15416	79835	92825	16964	16963	1
$l9$	$=$	2,	19722	45773	36219	38279	04905	04904	1
$l10$	$=$	2,	30258	50929	94045	68401	79914		

Hi ſcilicet Logarithmi omnes ex ſuperioribus tribus Seriebus ſunt deducti, præter $l7$, quem hoc compendio ſum aſſecutus. Poſui nimirum in Serie poſteriori $x = \frac{1}{99}$ ſicque obtinui $l\frac{100}{98} = l\frac{50}{49} = 0,02020270731751944840782 30$, qui ſubtractus a $l50 = 2l5 + l2 = 3,91202300542814605861875 08$, relinquit $l49$, cujus ſemiſſis dat $l7$.

M 2　　　124. Po-

P2

小数点以下28桁
28個の誤差

sin (m/n π/2)の
マクローリン展開

$$\text{ſin. A. } \frac{m}{n}\, 90^{\circ} =$$

+	$\frac{m}{n}$.	1, 5707963267948966192313216916	16
—	$\frac{m^3}{n^3}$.	0, 6459640975062462536557565636	38
+	$\frac{m^5}{n^5}$.	0, 0796926262461670451205055488	94
—	$\frac{m^7}{n^7}$.	0, 0046817541353186881006854632	39
+	$\frac{m^9}{n^9}$.	0, 0001604411847873598218726605	08
—	$\frac{m^{11}}{n^{11}}$.	0, 0000035988432352120853404580	85
+	$\frac{m^{13}}{n^{13}}$.	0, 0000000569217292196792681171	77
—	$\frac{m^{15}}{n^{15}}$.	0, 0000000006688035109811467224	32
+	$\frac{m^{17}}{n^{17}}$.	0, 0000000000060669357311061950	56
—	$\frac{m^{19}}{n^{19}}$.	0, 0000000000000437706546731370	74
+	$\frac{m^{21}}{n^{21}}$.	0, 0000000000000002571412892856	60
—	$\frac{m^{23}}{n^{23}}$.	0, 0000000000000000012538995403	05
+	$\frac{m^{25}}{n^{25}}$.	0, 0000000000000000000051564550	51
—	$\frac{m^{27}}{n^{27}}$.	0, 0000000000000000000000181239	39
+	$\frac{m^{29}}{n^{29}}$.	0, 0000000000000000000000000549	50

cos (m/n π/2)の
マクローリン展開

atque *cos*. A. $\frac{m}{n}$ 90° =

+		1, 0000000000000000000000000000	00
−	$\frac{m^2}{n^2}$.	1, 2337005501361698273543113745	49
+	$\frac{m^4}{n^4}$.	0, 2536695079010480136365633659	63
−	$\frac{m^6}{n^6}$.	0, 0208634807633529608730516364	72
+	$\frac{m^8}{n^8}$.	0, 0009192602748394265802417158	62
−	$\frac{m^{10}}{n^{10}}$.	0, 0000251020423730606054810526	30
+	$\frac{m^{12}}{n^{12}}$.	0, 00000047108747778818171503665	70
−	$\frac{m^{14}}{n^{14}}$.	0, 0000000063866030837918522408	10
+	$\frac{m^{16}}{n^{16}}$.	0, 0000000000656596311497947230	36
−	$\frac{m^{18}}{n^{18}}$.	0, 0000000000005294400200734620	23
+	$\frac{m^{20}}{n^{20}}$.	0, 0000000000000034377391790981	86
−	$\frac{m^{22}}{n^{22}}$.	0, 0000000000000000183599165212	15
+	$\frac{m^{24}}{n^{24}}$.	0, 0000000000000000000820675327	30
−	$\frac{m^{26}}{n^{26}}$.	0, 0000000000000000000003115285	84
+	$\frac{m^{28}}{n^{28}}$.	0, 0000000000000000000000010165	67
−	$\frac{m^{30}}{n^{30}}$.	0, 0000000000000000000000000026	28

CA I
VI

549×3.14/60=28.7・・・

ー1～8

P3

tan (m/n π/2)

cot (m/n π/2)の

マクローリン展開

1

1　　1

$128 = 2^7$

1

1　　1

tang. A. $\frac{m}{n}$ 90° =			cot. A. $\frac{m}{n}$ 90° =		
$+\frac{2mn}{nn-mm}$ ·	0,6366197723675		$+\frac{n}{m}$	0,6366197723675	
$+\frac{m}{n}$ ·	0,2975567820597		$-\frac{4mn}{4nn-mm}$ ·	0,3183098861837	
$+\frac{m^3}{n^3}$ ·	0,0186886502773		$-\frac{m}{n}$ ·	0,2052888894145	
$+\frac{m^5}{n^5}$ ·	0,0018424752034	35	$-\frac{m^3}{n^3}$ ·	0,0065510747882	
$+\frac{m^7}{n^7}$ ·	0,0001975800714	15	$-\frac{m^5}{n^5}$ ·	0,0003450292554	53
$+\frac{m^9}{n^9}$ ·	0,0000216977245	373	$-\frac{m^7}{n^7}$ ·	0,0000202791060	60
$+\frac{m^{11}}{n^{11}}$ ·	0,0000024011370	69	$-\frac{m^9}{n^9}$ ·	0,0000012366527	27
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}$ ·	0,0000002664132	33	$-\frac{m^{11}}{n^{11}}$ ·	0,0000000764959	58
$+\frac{m^{15}}{n^{15}}$ ·	0,0000000295864		$-\frac{m^{13}}{n^{13}}$ ·	0,0000000047597	
$+\frac{m^{17}}{n^{17}}$ ·	0,0000000032867		$-\frac{m^{15}}{n^{15}}$ ·	0,0000000002969	
$+\frac{m^{19}}{n^{19}}$ ·	0,0000000003651		$-\frac{m^{17}}{n^{17}}$ ·	0,0000000000185	
$+\frac{m^{21}}{n^{21}}$ ·	0,0000000000405		$-\frac{m^{19}}{n^{19}}$ ·	0,0000000000011	
$+\frac{m^{23}}{n^{23}}$ ·	0,0000000000045				
$+\frac{m^{25}}{n^{25}}$ ·	0,0000000000005				

PA

（ゼータ値の近似値）

×（1−1／2^n）

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$$
$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.$$
$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \&c.$$
$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \&c.$$

&c.

erit $l\pi = l4 - (A-1) - \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{3}(C-1) - \frac{1}{4}(D-1) - \&c.$

Eſt vero, ſummis ſupra inventis proxime exprimendis,

A	=	1, 23370055013616982735431
B	=	1, 01467803160419205454625
C	=	1, 00144707664094212190647
D	=	1, 00015517902529611930298
E	=	1, 00001704136304482550816
F	=	1, 00000188584858311957590
G	=	1, 00000020924051921150010
H	=	1, 00000002323715737915670
I	=	1, 00000000258143755665977
K	=	1, 00000000028680769745558
L	=	1, 00000000003186677514044
M	=	1, 00000000000354072294392
N	=	1, 00000000000039341246691
O	=	1, 00000000000004371244859
P	=	1, 00000000000000485693682
Q	=	1, 00000000000000053965917
R	=	1, 00000000000000005996817
S	=	1, 00000000000000000666246
T	=	1, 00000000000000000074037
V	=	1, 00000000000000000008225
W	=	1, 00000000000000000000913
X	=	1, 00000000000000000000101

548818

54・37

Y=1.000...00011

Z=1.000...00001

111＝3・37

Hinc ſine tædioſo calculo reperitur Logarithmus hyperbolicus ipſius π = 1, 14472988584940017414342, qui ſi mul-

なぜか正しい. 2巻では,

続いて37・・・本当は73

PB
（ゼータ値の近似値）
×１／２^n

$$\alpha = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \&c.$$
$$\beta = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \&c.$$
$$\gamma = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \&c.$$
$$\delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \&c.$$
&c.

erunt ſummæ in numeris proxime expreſſæ hæ :

α	=	0, 41123351671205660911810	10
β	=	0, 06764510210694613696975	75
γ	=	0, 01589598534350701780804	04
δ	=	0, 00392217717264822007570	70
ε	=	0, 00097753376477325984898	96
ζ	=	0, 00024420070472492872274	73
η	=	0, 00006103889453949332915	15
θ	=	0, 00001525902225127269977	271503
ι	=	0, 00000381471182744318008	08
κ	=	0, 00000095367522617534053	53
λ	=	0, 00000023841863595259154	9255
μ	=	0, 00000005960464832831555	55
ν	=	0, 00000001490116141589813	13
ξ	=	0, 00000000372529031233986	86
o	=	0, 00000000093132257548284	84
π	=	0, 00000000023283064370807	08
ρ	=	0, 00000000005820766091685	85
σ	=	0, 00000000001455191522858	58
τ	=	0, 00000000000363797880710	10
υ	=	0, 00000000000090949470177	77
ϕ	=	0, 00000000000022737367544	45
χ	=	0, 00000000000005684341886	86
ψ	=	0, 00000000000001421085471	71
ω	=	0, 00000000000000355271367	68

PA＋PB
8・59
101

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\&c.,$$

PC
素数ベキ和の近似値

ゼータ値の近似値を組み合わせて求められる

si fit	erit summa Seriei	157
$n = 2;$	0,452247420041222	1065
$n = 4;$	0,076993139764252	246
$n = 6;$	0,017070086850639	37
$n = 8;$	0,004061405366515	12・67
$n = 10;$	0,000993603573633	74437
$n = 12;$	0,000246026470033	35
$n = 14;$	0,000061244396725	25
$n = 16;$	0,000015282026219	19
$n = 18;$	0,000003817278702	02
$n = 20;$	0,000000953961123	24
$n = 22;$	0,000000238450446	46
$n = 24;$	0,000000059608184	84
$n = 26;$	0,000000014901555	55
$n = 28;$	0,000000003725333	33
$n = 30;$	0,000000000931323	26
$n = 32;$	0,000000000232830	30
$n = 34;$	0,000000000058207	07
$n = 36;$	0,000000000014551	51

n=38 0.0…3637
n=40 0.0…0909
n=42 0.0…0227
n=44 0.0…0056
n=46 0.0…0012
n=48 0.0…0003

12・67＝37＋59＋67＋101＋103＋131＋149＋157

参考
26までのゼータ値

「いくつか書き添えておきたいと思う」

lem. Quo autem valor harum ſummarum clarius perſpiciatur, plures hujuſmodi Serierum ſummas commodiori modo expreſſas hic adjiciam. CAP. X.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\&c.=\frac{2^4}{1.2.3....7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\&c.=\frac{2^6}{1.2.3....9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\&c.=\frac{2^8}{1.2.3.....11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\&c.=\frac{2^{10}}{1.2.3.....13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\&c.=\frac{2^{12}}{1.2.3.....15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\&c.=\frac{2^{14}}{1.2.3.....17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\&c.=\frac{2^{16}}{1.2.3.....19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\&c.=\frac{2^{18}}{1.2.3....21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\&c.=\frac{2^{20}}{1.2.3...23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\&c.=\frac{2^{22}}{1.\ 2.\ 3.........25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\&c.=\frac{2^{24}}{1.\ 2.\ 3.........27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}.$$

Hucuſque iſtos Poteſtatum ipſius π Exponentes artificio alibi exponendo continuare licuit, quod ideo hic adjunxi, quod Seriei

誤差に対する仮説

これらの間違いは意図的なものであり，一種の謎かけではないか．

理由（正弦・余弦の３１個中２８個の間違い）

・通常この程度の間違いがあればその理由を推測できるはずだが，現在まで不成功に終わっている．

・展開係数の次数の順に誤差を音階に対応させて並べると，ある種の旋律に聞こえる．（最後に演奏）

参考　出版前年に大バッハが『音楽の捧げもの』という見事な謎かけをふくむ曲集をフリードリッヒ大王に献呈した．7.7.1747

「求めよ，さらば与えられん」（マタイ7.7）

数字遊びによる謎かけ？

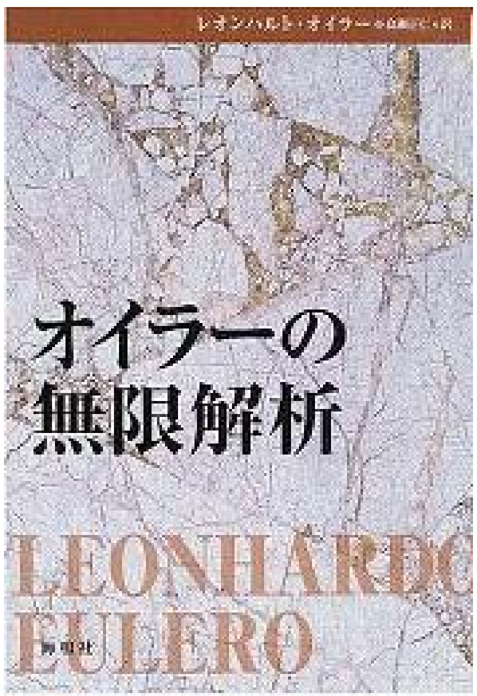
頭をやわらかくしてオイラーの遊び心を感じたい．

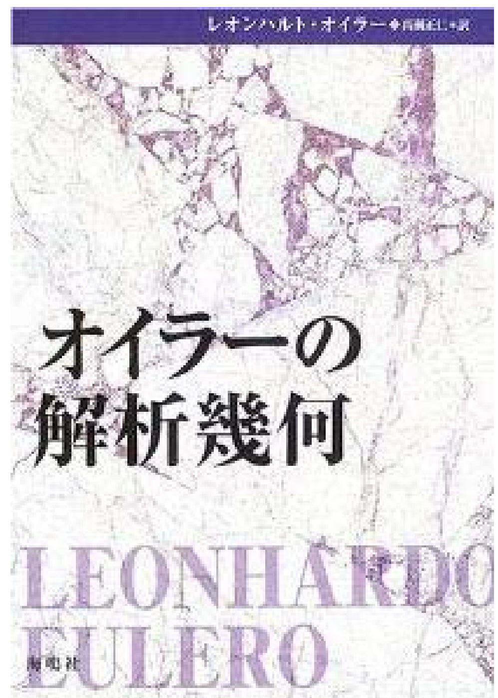
CRAB CANON →

← CRAB CANON

数字だけでは解釈が定まりにくいので,
解釈を方向づけるヒントを探す.
(ヒントを与えることは, 出題者の義務)

『無限解析入門』を隅々まで調べる!





巻頭の口絵

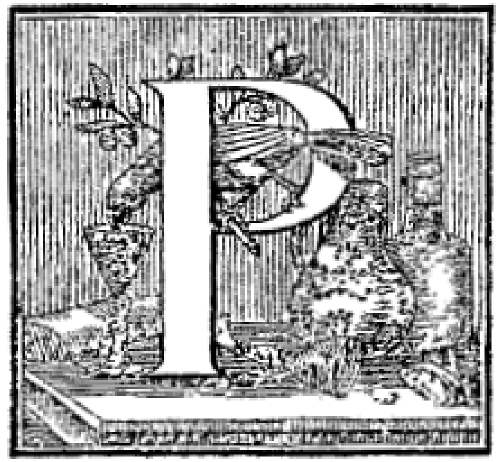
数学

代数 解析 幾何

音楽　幾何学

生物学（解剖学）　書き物？　幾何学　天文学

巻頭の絵文字



P　鳩とオリーブ　（ノアの箱舟）

Q　蛇と杖　（モーゼの杖）　旧約聖書

S　蜜蜂？　（約束の地？）

第1巻6章

例　$2^{7/12}$を求めよ.

平均律における完全5度　⇒音楽

例　洪水の後，6人の人間から人類が増えたとして，200年後に1000000人に達したとき，人口は毎年どの程度の割合で増加しているか.

ノアの洪水　⇒　旧約聖書（巻頭の絵）

音楽＋旧約聖書　⇒　詩篇（PS＝Psalm）

ヒントからリストの解釈がほぼ定まっていく.
（詳細は『無限オイラー解析』）

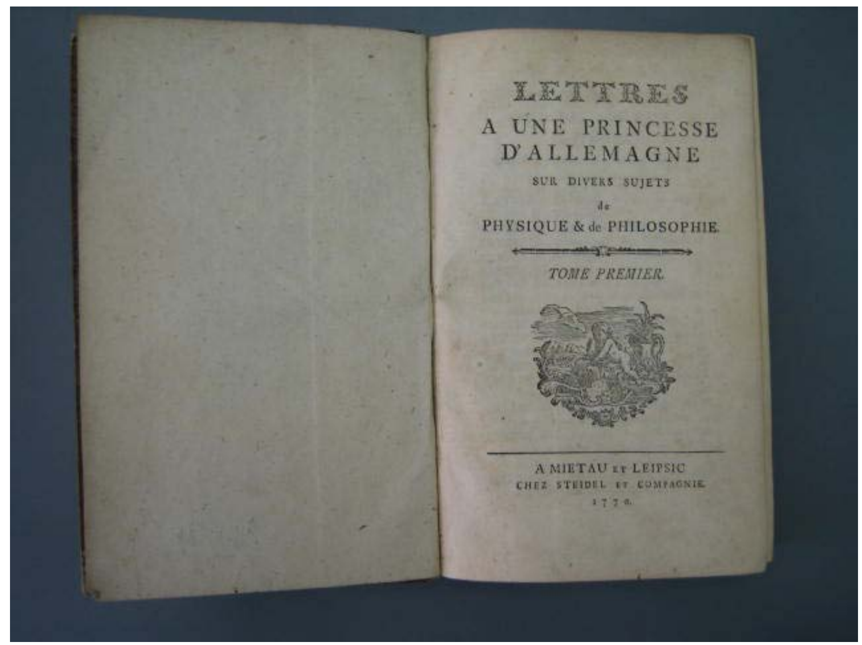
P0	$\mathrm{Log}_{10}5$	全問題	算術
P1	Log n	詩篇 PS111-2	神学
P2	Sin, Cos	詩篇の曲	音楽
P3	Tan, Cot	７つの橋	幾何学
PA～PC	ゼータ	非正則素数	天文学

答えは『入門』の同工異曲の例　1巻6章，2巻22章

「ゼータ ー非正則素数 ー天文学」の関連は難しい.
『ベキ乗と逆数のベキ乗級数の美しい関係』
（E352　著述1749　出版1768）
の太陽と月は，明示的なヒントになりうる.

3.『ドイツ公女への手紙』

『無限解析入門』の答えが第1巻にほぼ順序通りに現れる.



空間ー音楽ー光学ー天文学

Ｐ１

Great (*Gadol*) are the works of the Lord.

ＰＳ１１１－２前半

第１通目の最後

``Toute cette *Immensité* est l'ouvrage du Tout puissant''
（全ての広大無辺は全能者のみわざ）

・アルファベット詩篇なので語順は重要

・詩篇３７，１１１，１１２は，アルファベット詩篇

アルファベット		ゼータ値のリストの個数	
ヘブライ	２２文字	PA	２２個
ギリシア	２４文字	PB	２４個
ラテン（18世紀）	２６文字	PA+PB	２６まで
ラテン文字でヘブライに起源	１８文字	PC	１８個

広大無辺 *Immensité*

ドイツ語とフランス語の併記(20通目）
エルサレムの説教

「天地創造から現在まで光が届いていない天体までの空間を見渡そう．神の世界の広大無辺はこんな想像を許してくれる」
これらを深く考えることで，好奇心を持って光の学説を学んでほしい．

Steiget mit euren Gedanken von dieser Erde, durch alle die Weltkörper, die über euch sind, und gehet von den entferntesten, die eure Augen entdecken können, bis zu denjenigen hinauf, deren Licht vielleicht von dem Anfange ihrer Schöpfung an, noch bis jetzt nicht zu uns herunter gekommen ist! Die Unermeßlichkeit des göttlichen Reichs leidet diese Vorstellung. (Aus der Predigt von dem Himmel und der ewigen Seeligkeit.)

Elevés vos pensées depuis cette terre que vous habités, jusqu'à tous les corps du monde, qui sont au dessus de vous; parcourés l'espace qu'il y a depuis les plus éloignés que vos yeux puissent découvrir, jusqu'à ceux dont la lumiere, peut-être depuis le commencement de leur création jusqu'à présent, n'est pas encore parvenüe jusqu'à nous. L'immensité du Royaume de Dieu permet cette peinture. (Du Sermon sur le Ciel & la béatitude éternelle.)

P2

（3通目　弦の振動による音）

第4通目　協和音と不協和音

公女殿下はたった今非常に優美なやり方で私の思考の糸を中断されました　・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

・・・・・・・・・・・・・・・・

感謝の気持ちに満たされたまま，私の話に戻ることにしましょう.

LETTRES. IV. **234通中唯一**

Votre Alteſſe vient d'interrompre le fil de mes penſées d'une maniere très gracieuſe . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4+16+16+16 (1768年)

LETTRE IV.

Votre Alteſſe vient d'interrompre le fil de mes penſées d'une maniere très gracieuſe . . .
. . . .
. . . .
. . . .

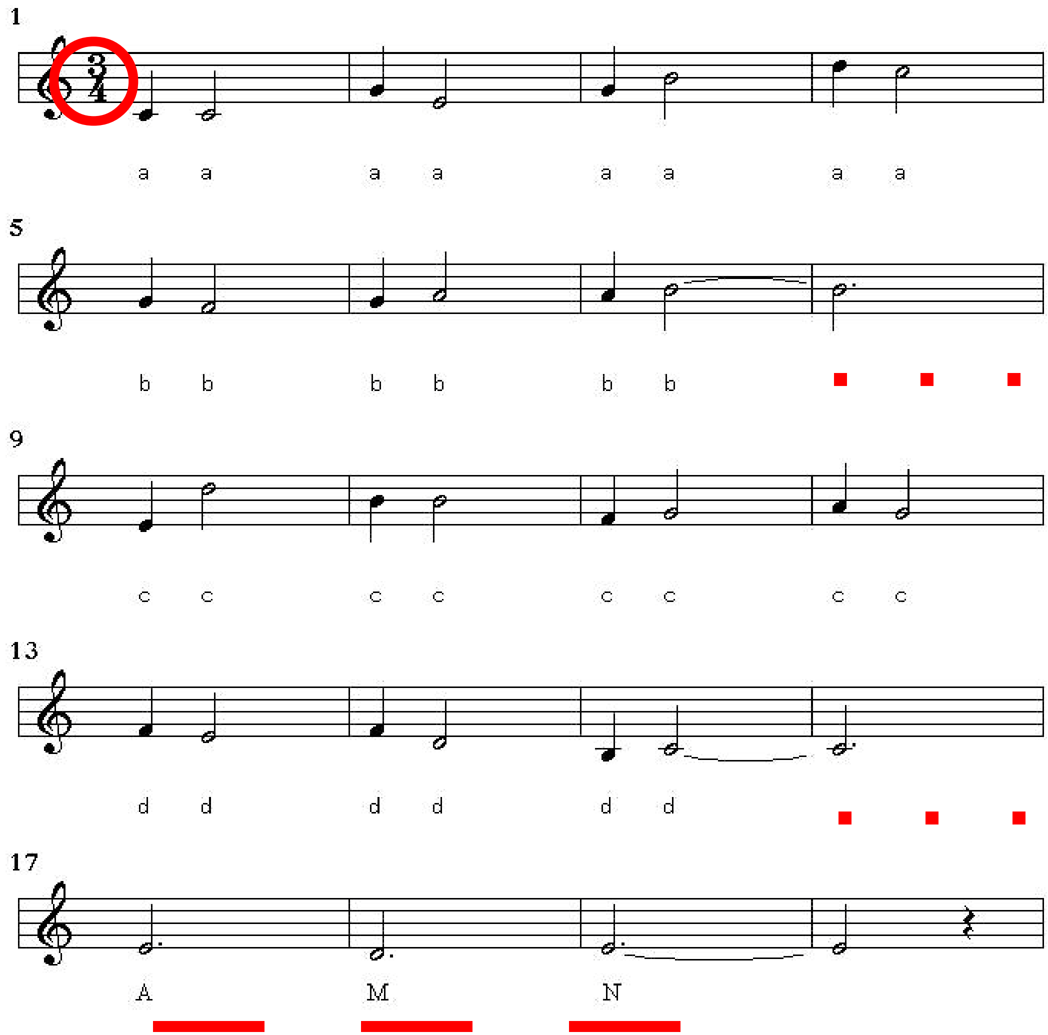
3+14+14+14(1770年)

Vierter Brief.

Ew. H. haben den Faden meiner Gedanken auf eine höchſt gnädige Art unterbrochen. — — —
Ich kehre alſo mit einem Herzen voller Dankbarkeit

— — —(1769年)

拍子の疑問を解決



$$\sin.\ A.\ \frac{m}{n}\ 90^\circ \qquad \cos.\ A.\ \frac{m}{n}\ 90^\circ$$

$$\text{tang.}\ A.\ \frac{m}{n}\ 90^\circ \qquad \cot.\ A.\ \frac{m}{n}\ 90^\circ$$

4番目にあったドットが消失

			Difference
C	2.2.2.2.2.2.2.3...	384	
Cs	2.2.2.2.5.5........	400	16
D	2.2.2.2.3.3.3.....	432	32
Ds	2.3.3.3.5..........	450	18
E	2.2.2.2.2.3.5.....	480	30
F	2.2.2.2.2.2.2.2.2.	512	32
Fs	2.2.3.3.3.5........	540	28
G	2.2.2.2.2.2.3.3...	576	36
Gs	2.2.2.3.5.5........	600	24
A	2.2.2.2.2.2.2.5...	640	40
B	3.3.3.5.5...........	675	35
H	2.2.2.2.3.3.5......	720	45
c	2.2.2.2.2.2.2.2.3.	768	48

1768年　234個の数字とドット

			Difference
C	2.2 2.2.2.2.2.3...	384	
Cs	2.2.2.2.5.5........	400	16
D	2.2.2.2.3.3.3.....	432	32
Ds	2.3.3.3.5..........	450	18
E	2.2.2.2.2.3.5.....	480	30
F	2.2.2.2.2.2.2.2.2.	512	32
Fs	2.2.3.3.3.5........	540	28
G	2.2.2.2.2.2.3.3...	576	36
Gs	2.2.2.3.5.5........	600	24
A	2.2.2.2.2.2.2.5...	640	40
B	3.3.3.5.5...........	675	35
H	2.2.2.2.3.3.5......	720	45
c	2.2.2.2.2.2.2.2.3.	768	48

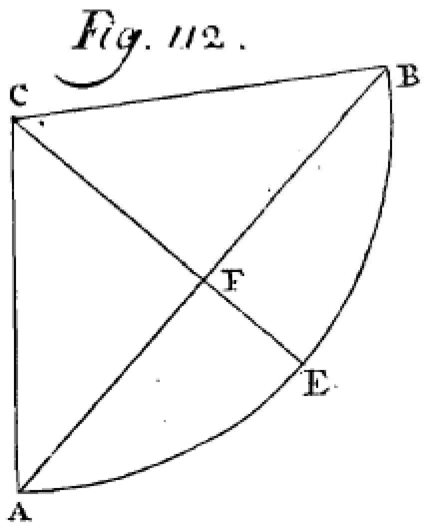
1770年　233個の数字とドット

第4通目　協和音と不協和音

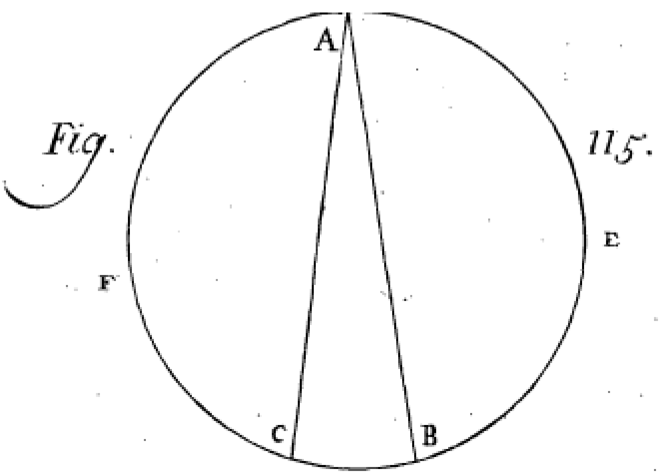
P3　2つの頂点数5のグラフ

QEDと同じく「D」がない

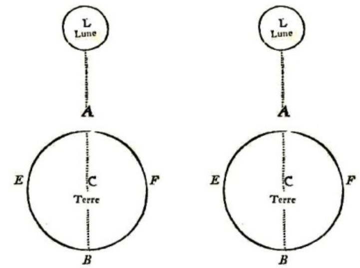
『無限解析入門』2巻22章



7つの橋のグラフの変形

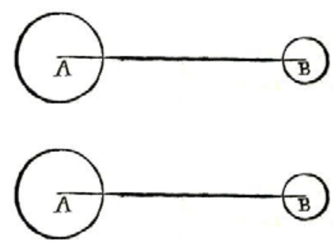


7つの橋のグラフの双対



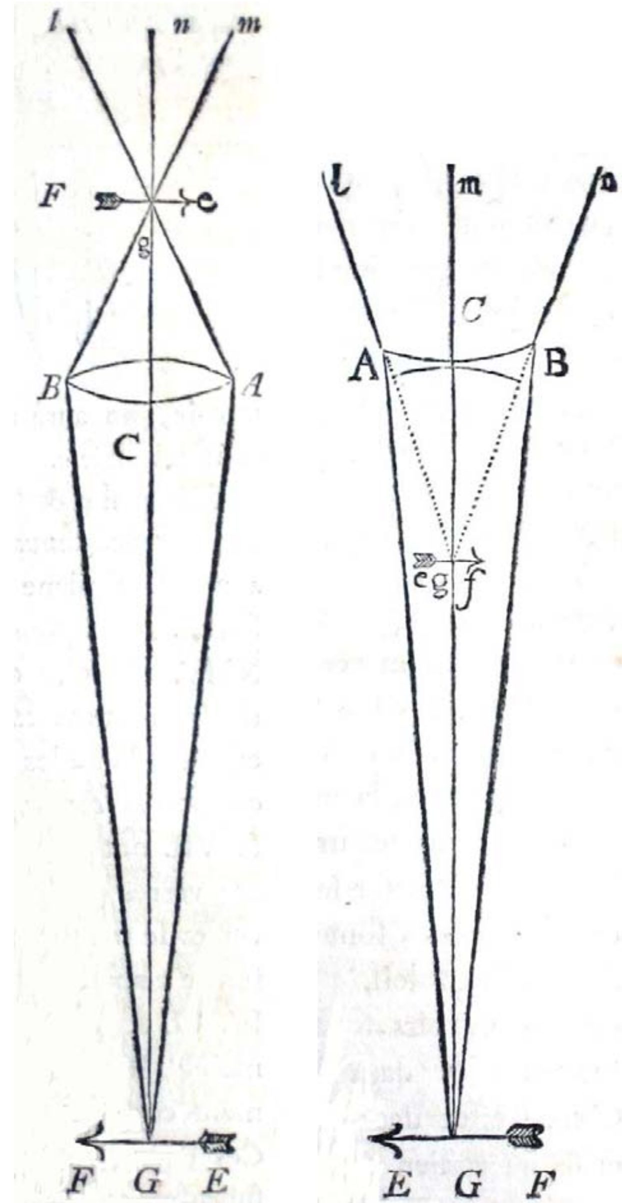
上下

左右



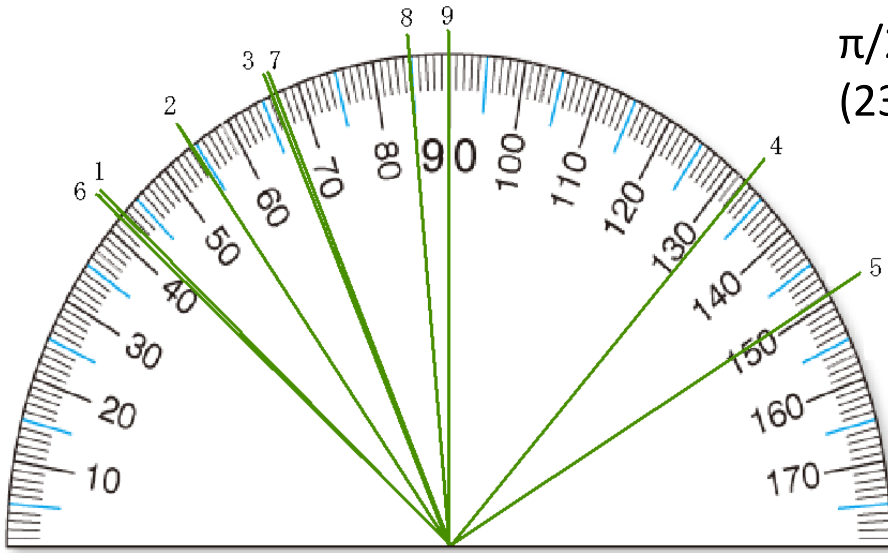
指の本数

２×５



39通目の手紙

PA～PC(『無限解析入門』2巻22章の例の解)

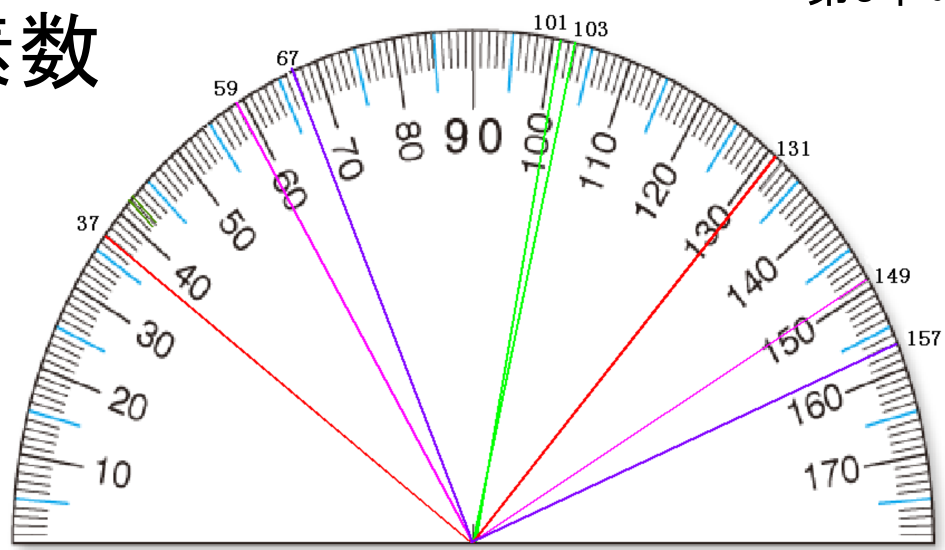


π/2=1.57･･･
(233,84) ⇒ 149=233-84

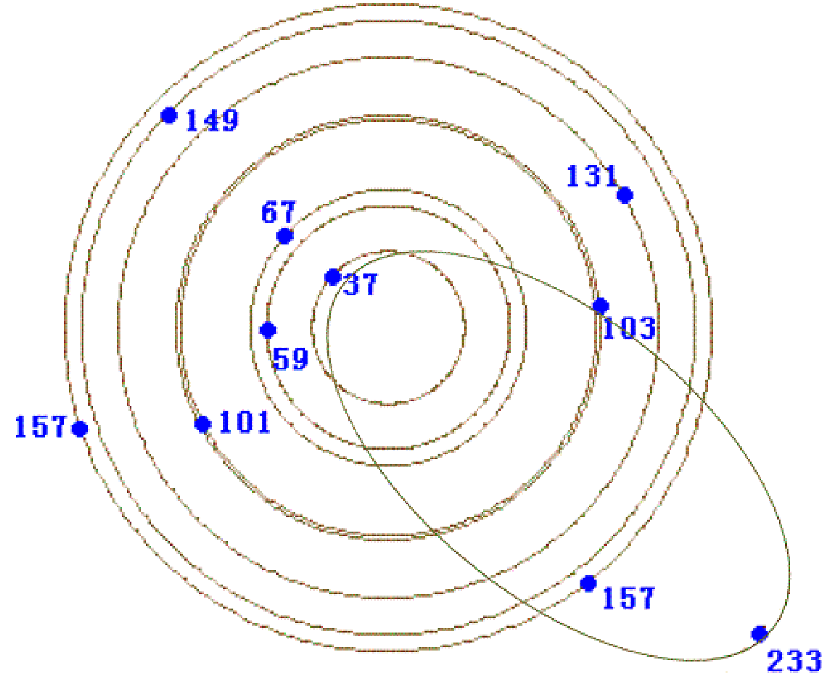
第6章の例　31/30=1.0333..
101/100=1.01

非正則素数

37，59で
5，－5のずれ

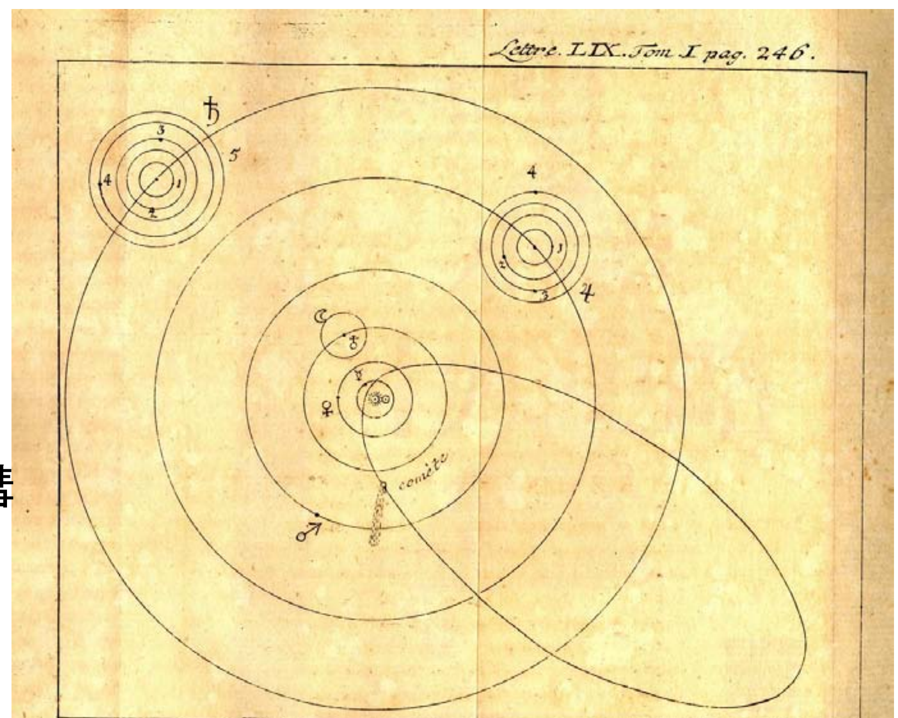


PA～PC
非正則素数
と指数 (p,k)



半径 p-1
角度 2πk／(p-1)

オイラーの
太陽系
59通目の手紙



太	水	金	地	火	木	土	彗	彗
16	22	37	67	103	101	131	149	

オイラーの遊び心・・・・数学観・世界観

神学・音楽・幾何学・天文学の謎かけの答えは非正則素数に関係しており，最後まで答えを明示的に書かなかったのではないか.

（詳細は『無限解析の源流』）

オイラーの「数そのもの」に対する愛情.

自身の高度な研究に対する理解者探し.

E128　正弦のマクローリン展開（1750年出版）

Erit igitur finus arcus $\frac{m}{n}$ 90 graduum $=$

$+ \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966192313216916$

$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,6459640975062462536557565636$

$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0796926262461670451205055487$ 8

$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0046817541353186881006854633$ 2

$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0001604411847873598218726605$

$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000035988432352120853404580$

$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000569217292196792681170$ 1

$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000006688035109811467225$ 4

$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000060669357311061950$

$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000000000437706546731370$

$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000000002571422892855$ 6

$- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000000000012538995403$

$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000000000000051564550$

$- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0,0000000000000000000000181239$

$+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0,0000000000000000000000000549$

$- \frac{m^{31}}{n^{31}} \cdot 0,0000000000000000000000000001$ ×

拍子の推測

37, 59, 67

555

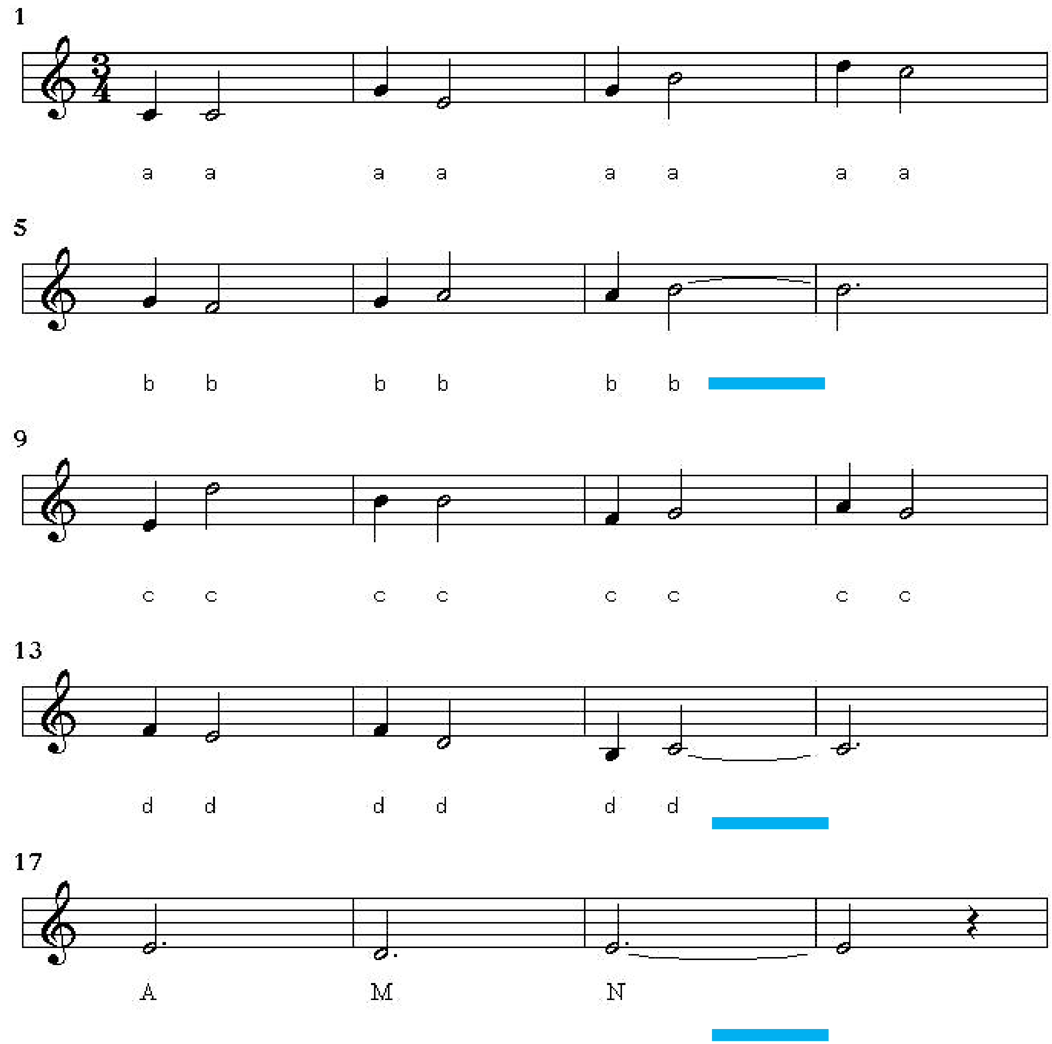
誤差の和

－3

誤差の絶対値の和

111

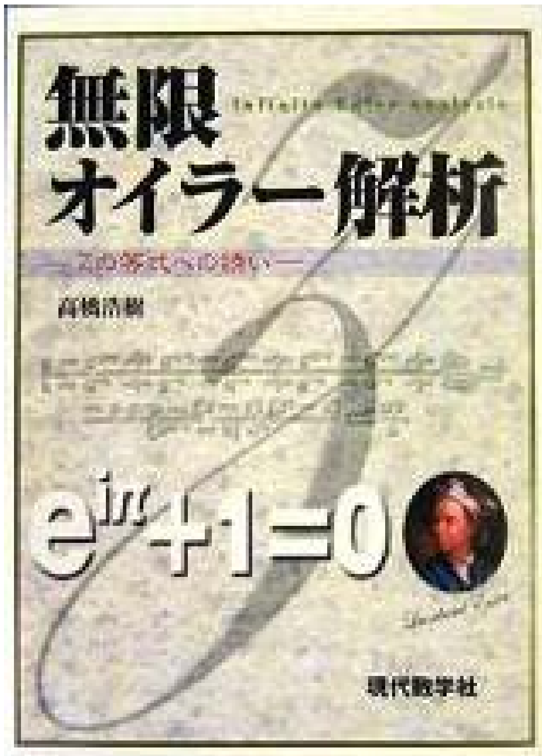
111/3=37

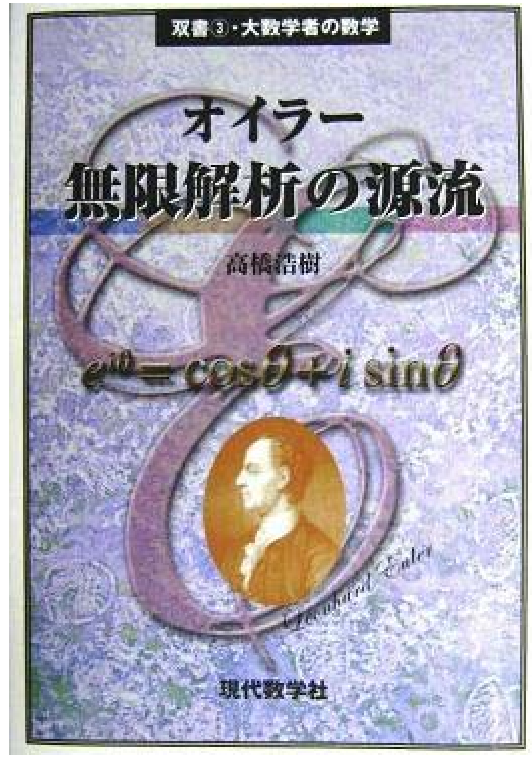


ſin. A. $\frac{m}{n}$ 90°　　coſ. A. $\frac{m}{n}$ 90°

tang. A. $\frac{m}{n}$ 90°　　cot. A. $\frac{m}{n}$ 90°

オイラーの曲？





オイラー生誕 303=3・101 年