素数を調べる

―その多様な姿―

広島大学大学院理学研究科

数学専攻　高橋浩樹

1．1　素数の定義

1とそれ自身以外に約数を持たない
1より大きな自然数.

自然数　1, ②, ③, ~~4~~, ⑤, ~~6~~, ⑦ ・・・

○素数　×合成数

(2の約数)＝{1，2}　　(3の約数)＝{1，3}

(4の約数)＝{1，2，4}　(5の約数)＝{1，5}

(6の約数)＝{1，2，3，6}　(7の約数)＝{1，7}

小さな素数たち

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，・・・

定義は簡単であるが，
その多様な性質を解き明かそうとすると
しばしば困難を極める．

ゴールドバッハの予想
(4以上の偶数)=素数+素数．
4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7,12=5+7,・・・

代数，幾何，解析的手法
が多面的に利用される．
色んな数学に感謝！

1．2　エラトステネスのふるい

n 以下の素数は$\sqrt{n}$ 以下の素数の倍数を除くことによって得られる.

n=100 のとき，$\sqrt{n}=10$

表が単純なパターンになる理由

×印の周期をmとする.

1行の文字数aをmで割った余りをrとすると,

次の行では，×印は 左に r ずれ,

右に m－r ずれる.

a=14, m=2,3,5,7の場合，ずれが小さい.

a=14

m=2, 14÷2=7 余り r=0　　ずれない.

m=3, 14÷3=4 余り r=2=m-1　右に1ずれる.

m=5, 14÷5=2 余り r=4=m-1　右に1ずれる.

m=7, 14÷7=2 余り r=0　　ずれない.

ずれが小さいので単純なパターンになる.

１．３　整数をmで割った余りの集合

$\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}=\{0,1,2,3,\ldots,m-2,m-1\}$

この集合内での足し算，引き算，掛け算，割り算の構造

→　代数学　群論，環論，体論

・mが素数である時と合成数である時の
　違いを表で探してみよう！
・１～m-1の全ての数字が現れる行や列は？

1．4　素数の無限性（ユークリッド）

$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{r-1}$：素数とする．

p_r=（$p_1 p_2 p_3 \cdots p_{r-1}$+1の素因数）とすると，

p_rは$p_1, p_2, \cdots, p_{r-1}$とは異なる新たな素数である．

大きな数の素因数分解は難しい．
この難しさが公開鍵暗号の代表である
RSA暗号に用いられている．

１．５　有名な素数たち

・フェルマー素数：2^m+1型の素数
　　$m=2^n$　５個知られている．
　　正多角形の作図問題（２．３）

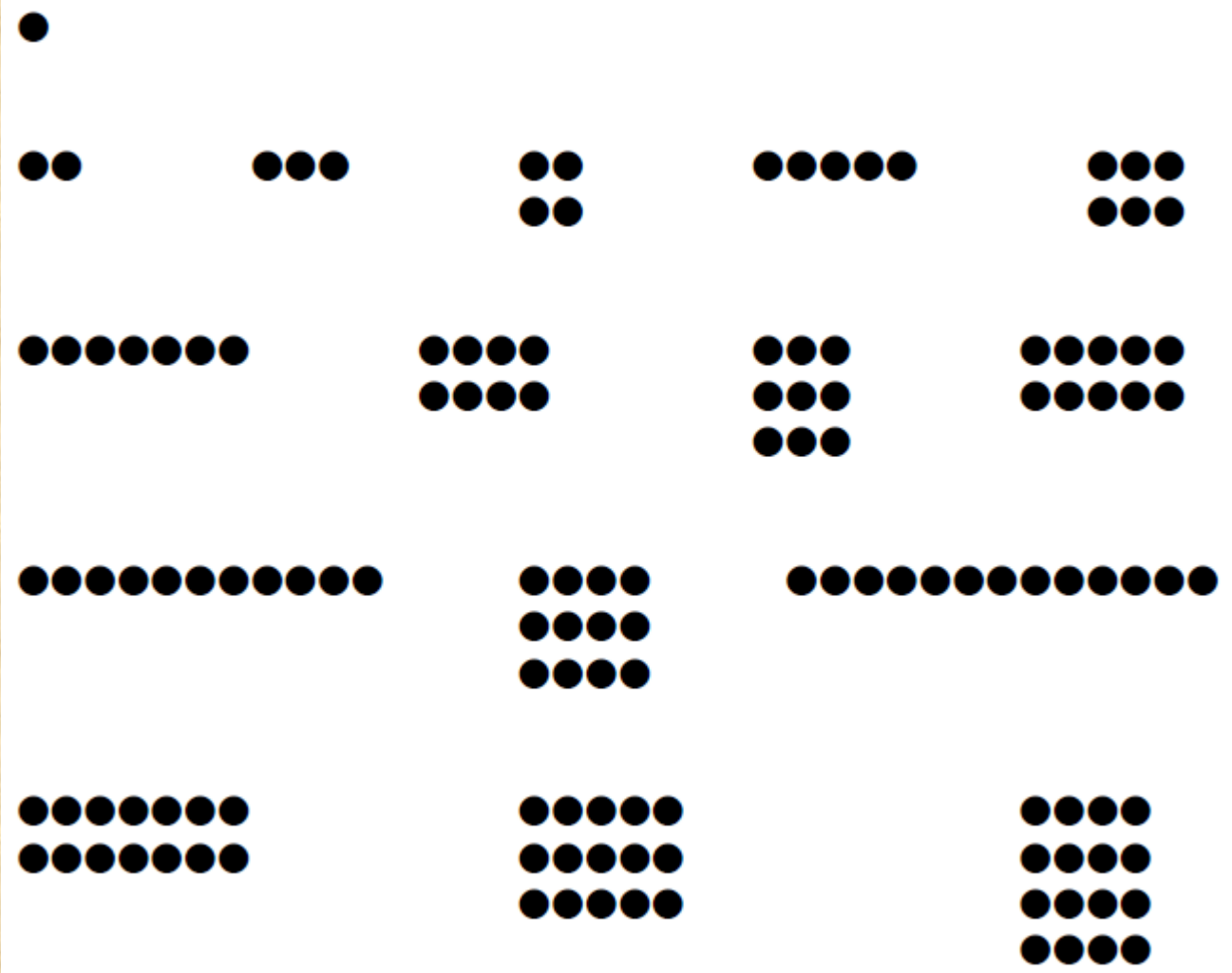
・メルセンヌ素数：2^m-1型の素数
　　$m=p$　４７個知られている．
　　完全数の構成
　　$M_{43112609}$は約１３００万桁の素数！
　　・・・巨大素数探し：GIMPS

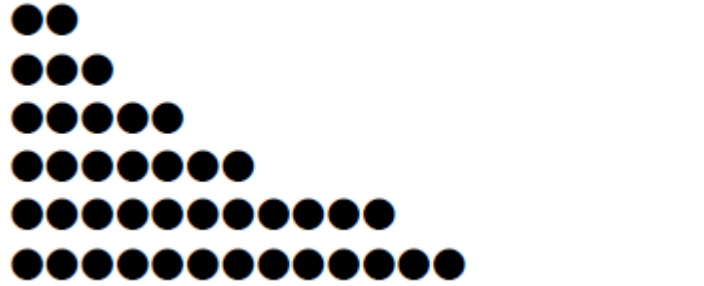
・双子素数，三つ子素数，・・・

2.1 素数の表現

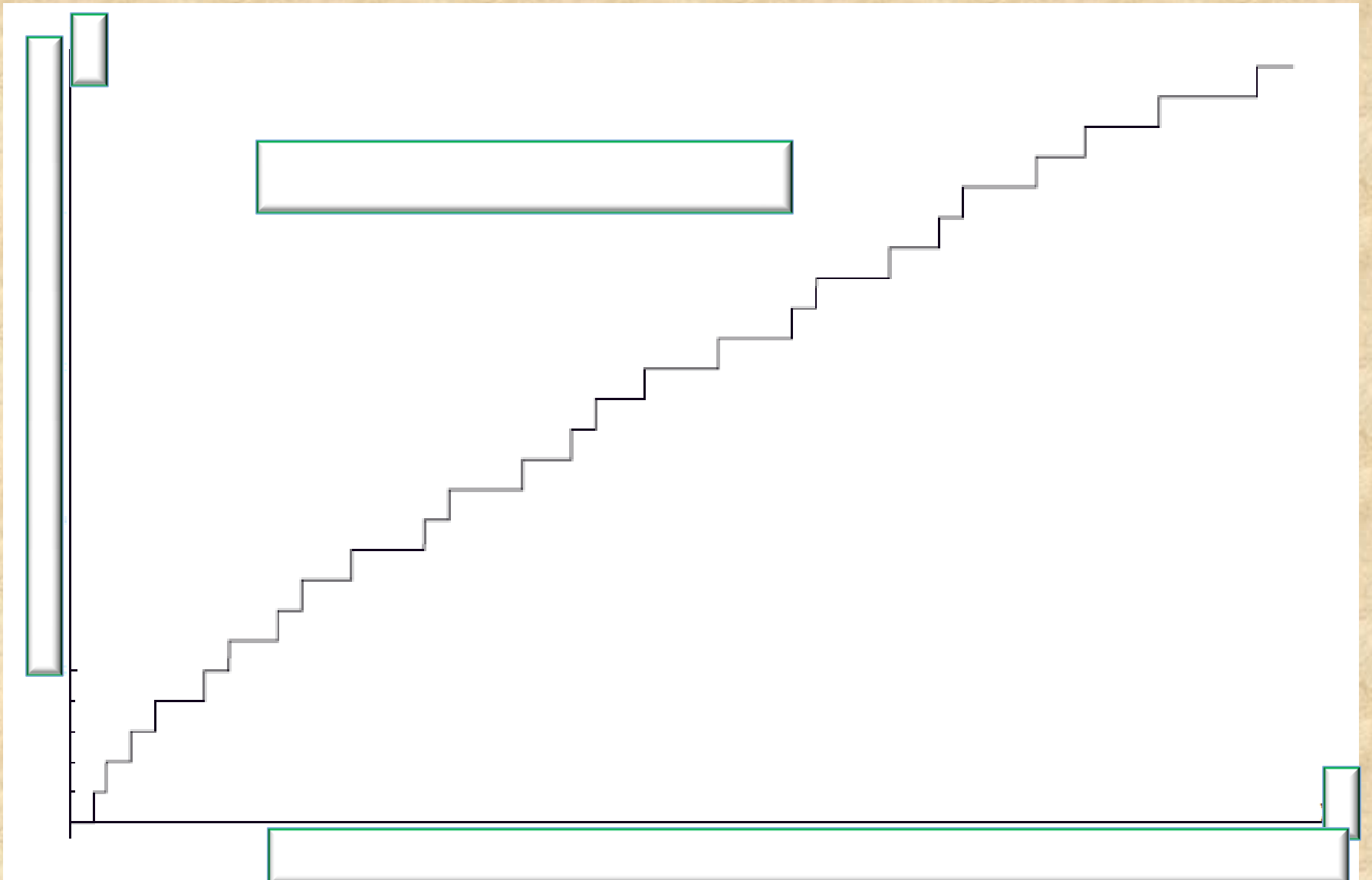
紀元前2万年頃のイシャンゴ骨 （ナイル川源流）

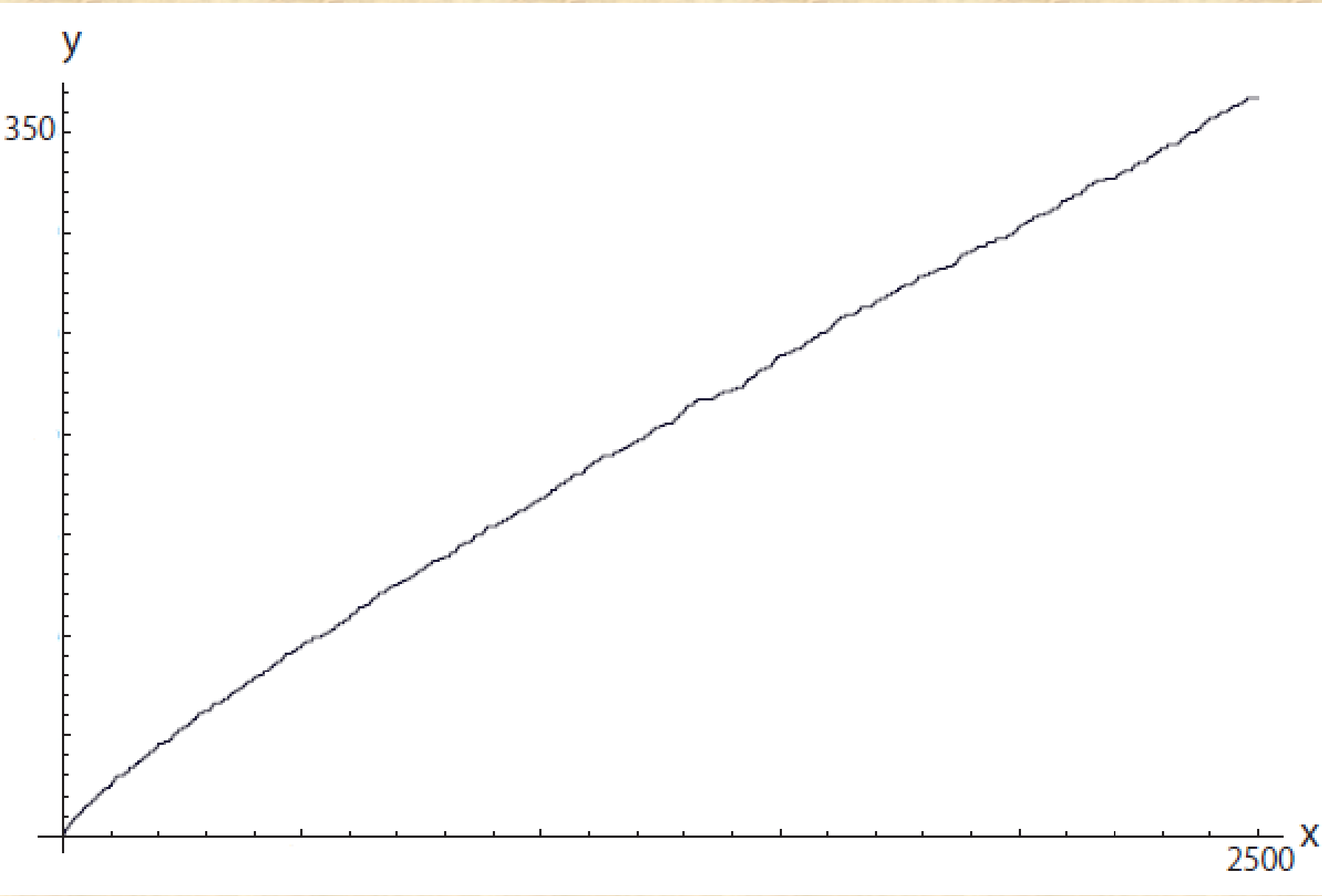
Science Museum of Brussels提供. (Wikipedia)

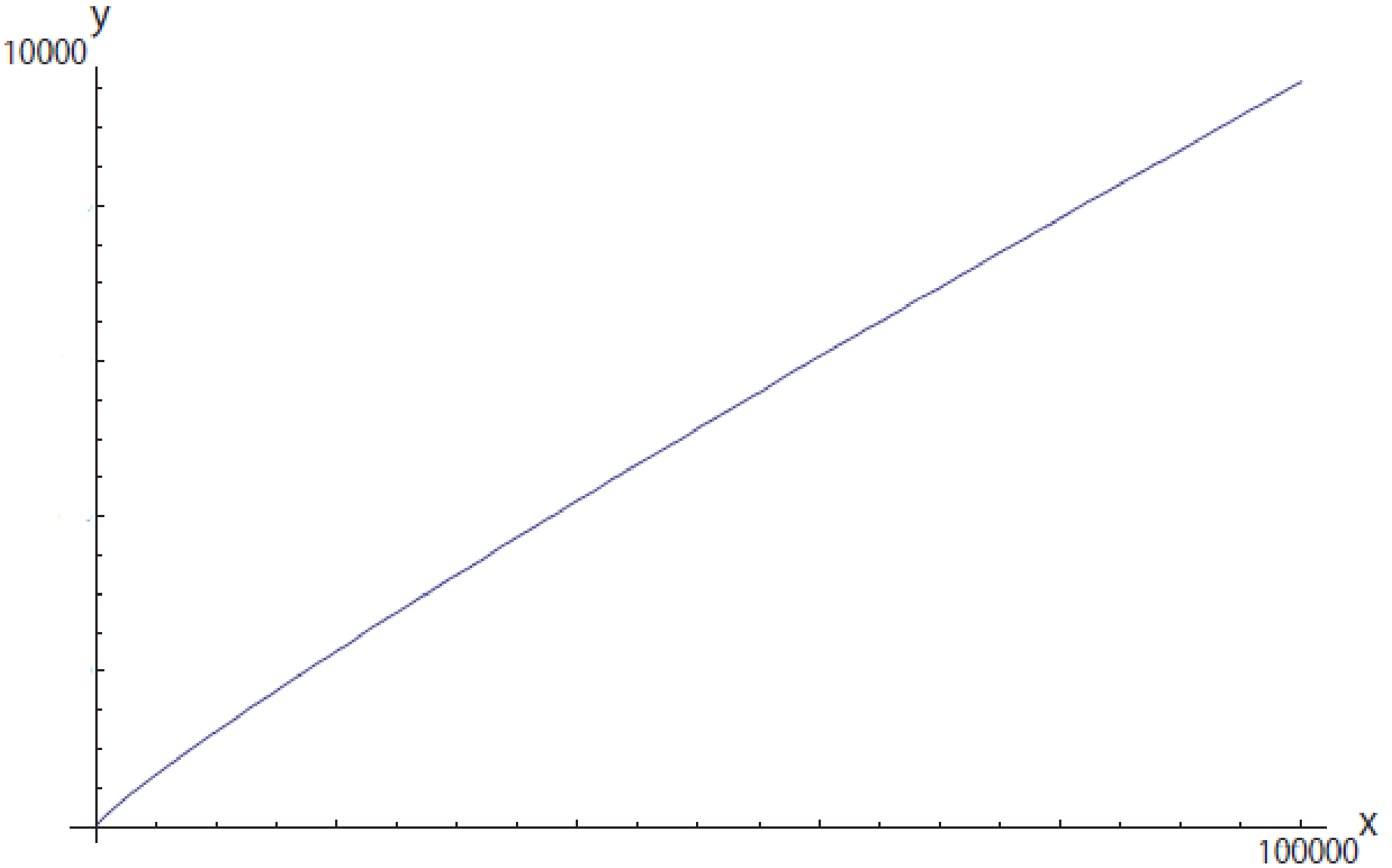




2.2 素数のグラフ



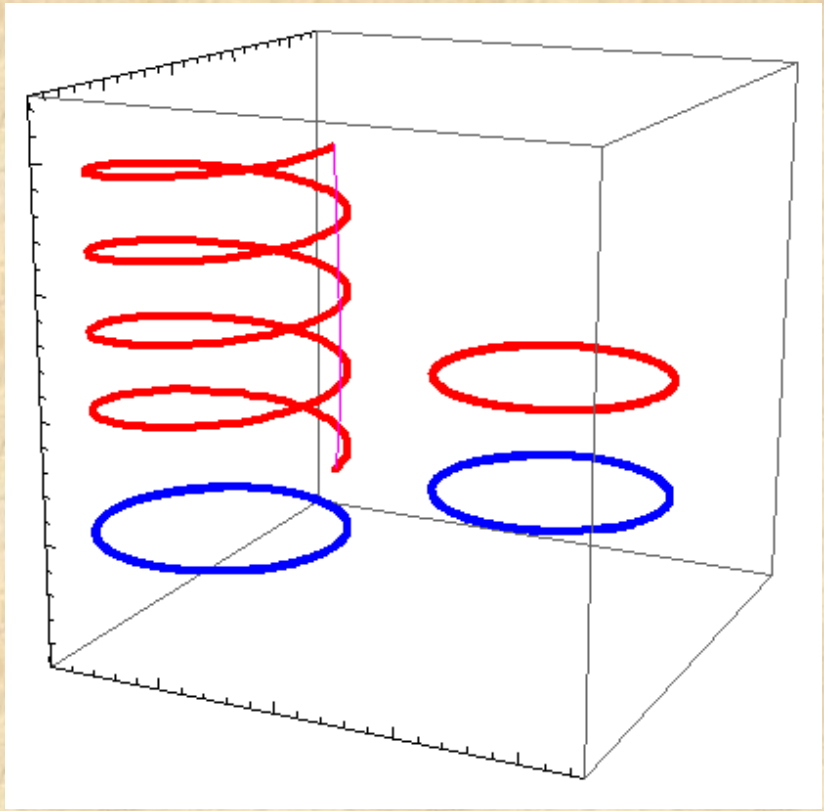

y
350
x
2500

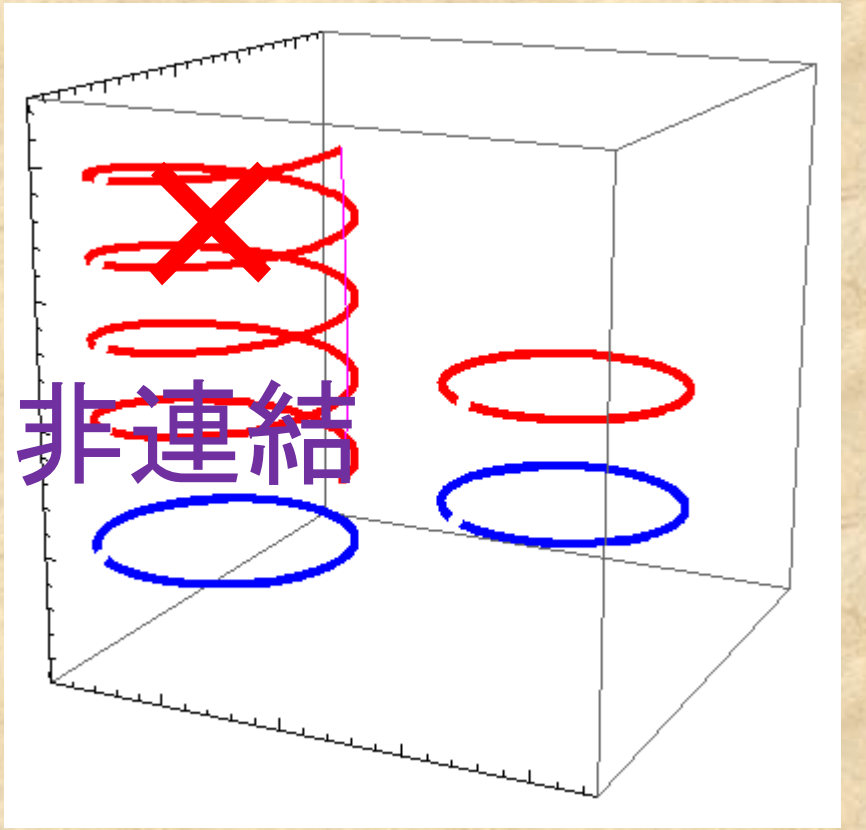

y
10000
x
100000

☆素数をまとめて考える

→ **素数空間**（1次元～3次元）

☆**空間**の「形」を調べるために，その**被覆空間**たちを調べる方法がある．





・Zの素数空間

P= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,・・・}

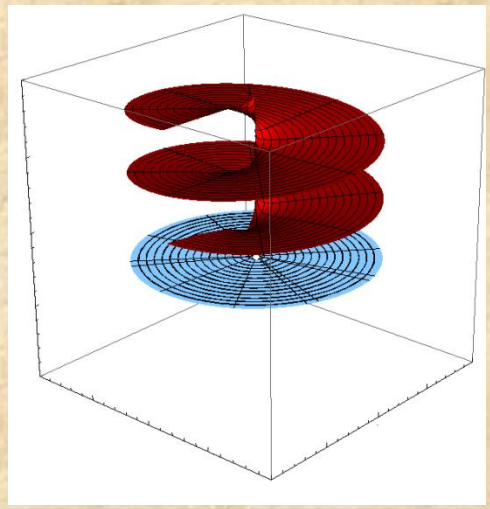
・Zの素数空間の被覆空間の例

Z[i]={a+b i| a,b:整数}の全ての素元　($i^2=-1$)

P’= {1+i, 3,1+2i, 1-2i, 7, 11, 3+2i, 3-2i, ・・・}

P’-{1+i}

P-{2}



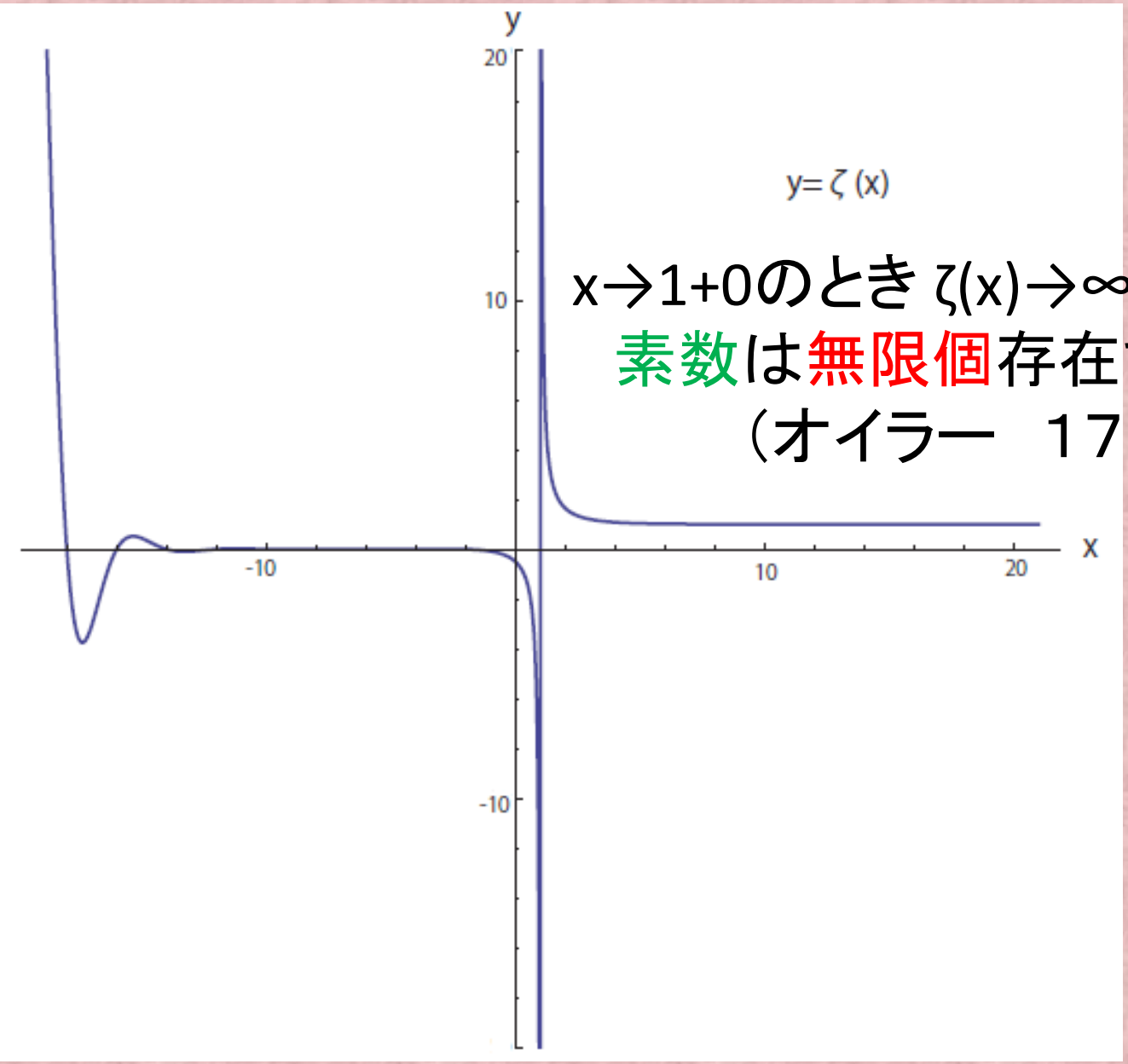
素数の個数π(x)は？
素数**空間**Pの被覆**空間**は？

いずれの問題もゼータ関数
と呼ばれる特殊関数が
解答の鍵を握っている！

３．１－３．２　リーマンゼータ関数

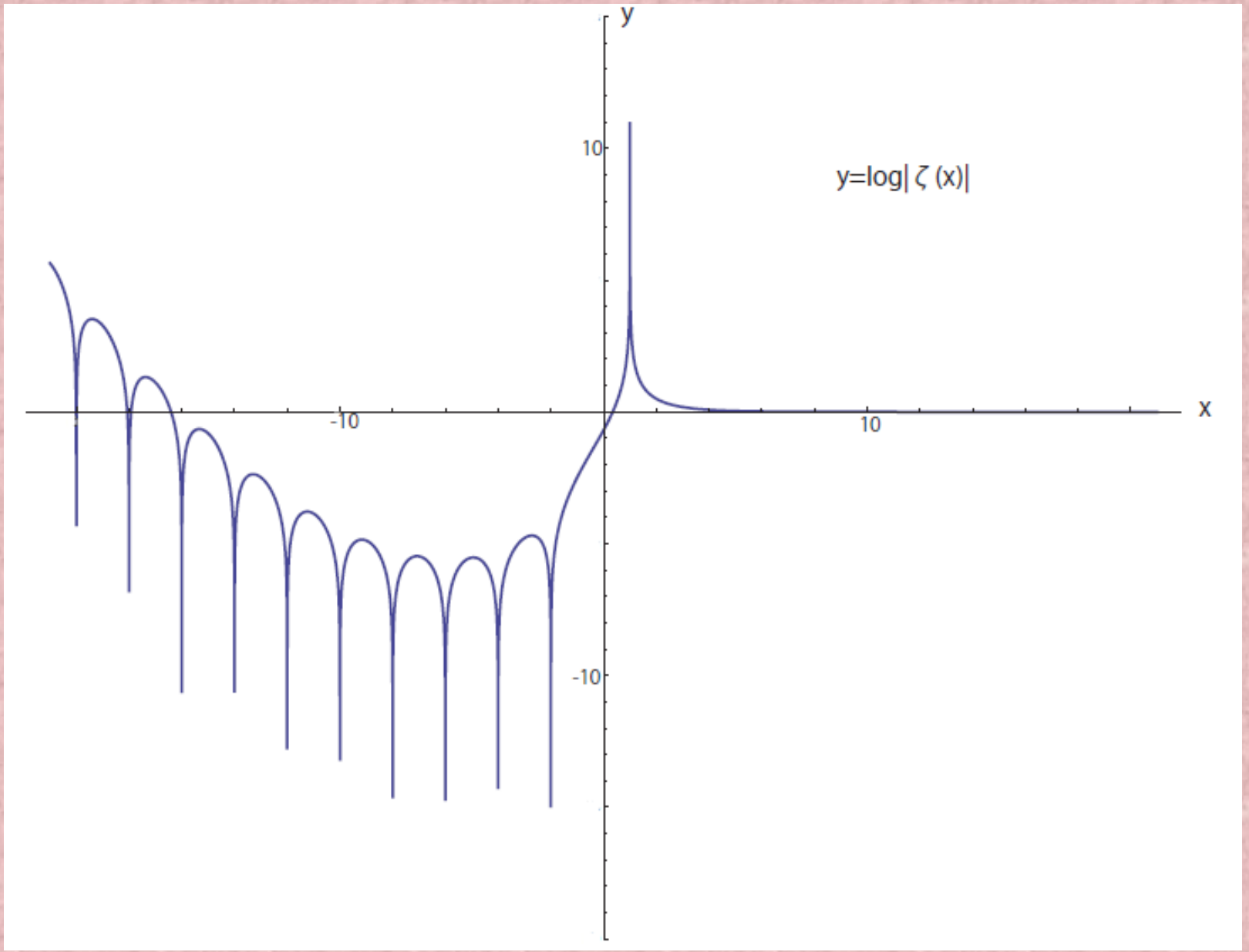
$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots$$

- x>1 のとき収束する.
- 複素変数s=x+iyの複素関数ζ(s)に
  滑らかに拡張できる.
  （滑らかさ⇔高次の微分可能性）

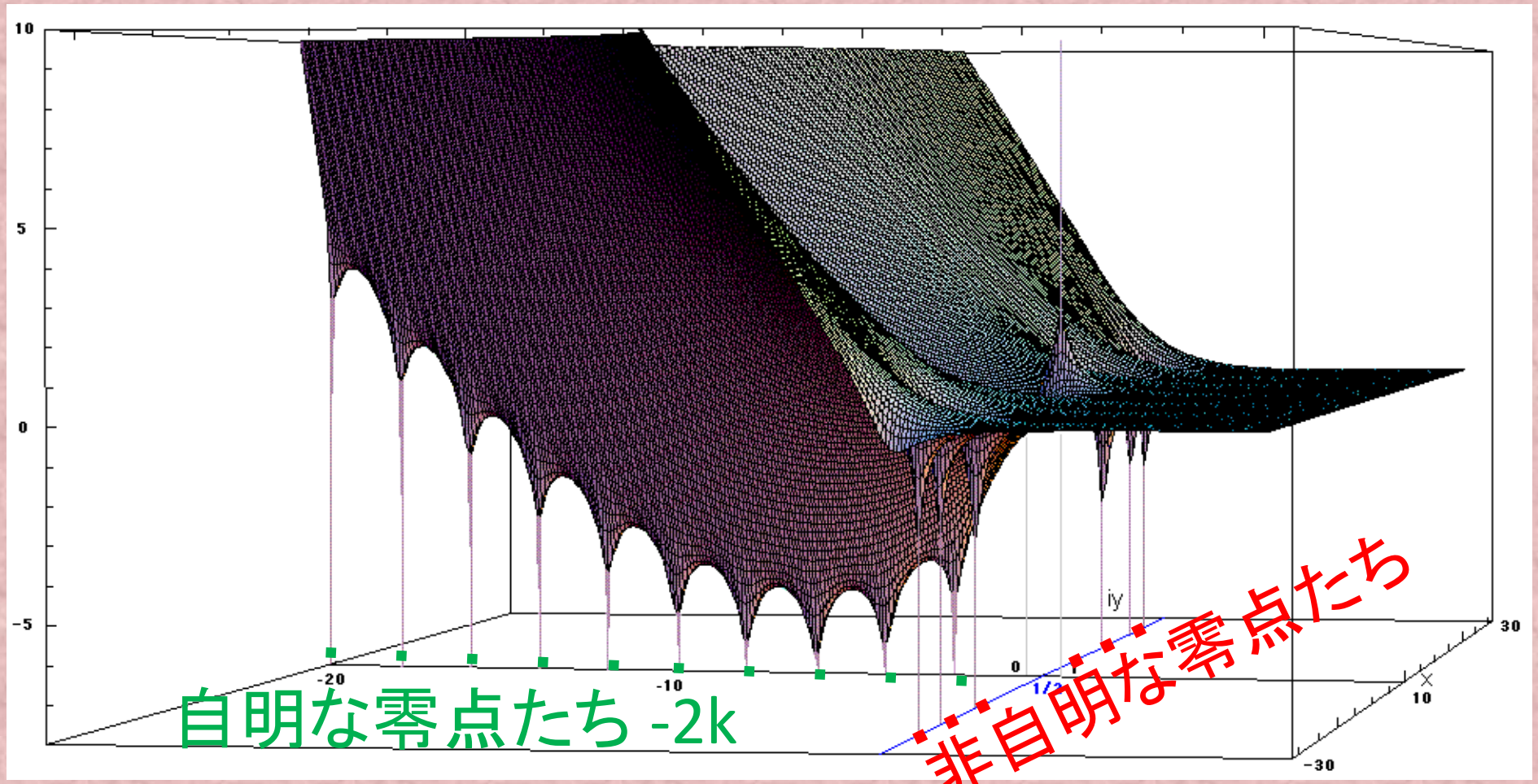


x→1+0のとき ζ(x)→∞より，
素数は無限個存在する.
（オイラー　1737）

実関数　ζ(x)



実関数　log|ζ(x)|



複素関数　$\log|\zeta(s)|$　$=\log|\zeta(x+iy)|$

$\zeta(s_0)=0$ となるs_0 を $\zeta(s)$の零点という.

$\Leftrightarrow s\to s_0$ のとき　$\log|\zeta(s)|\to-\infty$　となる.

３．３　リーマン予想

ζ(s)の全ての非自明な零点は，
直線 x=1/2 上にある．

⇕ 同値な予想

素数の個数π(x)の予想

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{x}\log x)$$

解決すればクレイ数学研究所から100万ドル！

（×クレイ社 p.13,-l.4 ）

３．４　リーマンゼータ値

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \text{ etc.} = \frac{p^2}{6} = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90} = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} \text{ etc.} = \frac{p^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} \text{ etc.} = \frac{p^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} \text{ etc.} = \frac{p^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} \text{ etc.} = \frac{691\,p^{12}}{6825 \cdot 93555} = V.$$

オイラーの数値リスト（１７３５）

ζ(1-k)は有理数.

分母の予測は可能*
分子の予測は困難*

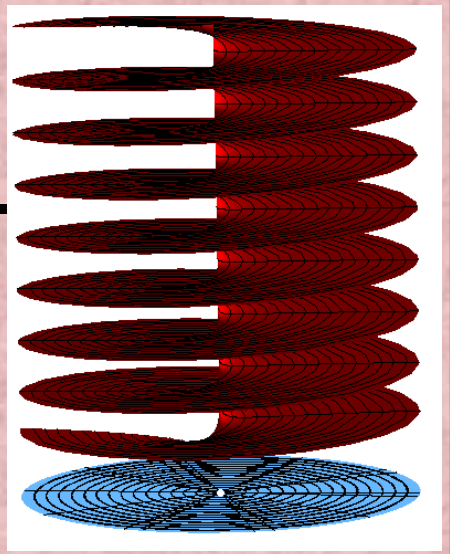
素数pの出現が周期p-1
となるのは同じ.

岩澤主予想（メイザー＆ワイルズ,1984）

ζ(1-k)の分子に素数pが出現する.

⇔素数**空間**P-{p}にk方向の
p巾無限次被覆**空間**P’が存在.

⇔p^{∞}円分体のk方向のp巾
イデアル類群の位数は無限.



どの程度の無限であるかを精密に証明している.
保型形式という特殊関数を用いて被覆**空間**を構成する.

フェルマーの最終定理（ワイルズ,1994）

$x^n + y^n = z^n$, x, y, z, n : 整数, n>2

ならば, $xyz = 0$.

・フライは最終定理の反例から異常な楕円曲線（谷山－志村予想の反例）が構成されると主張し，リベットがその主張を証明した.

・ワイルズは，岩澤主予想の証明で用いた手法を発展させて谷山－志村予想（楕円曲線と保型形式の対応）を証明し，最終解決に至った.

素数**空間**, ゼータ関数はまだまだ未解明.

- 高次表現での対応(ラングランズ予想)
- ゼータ関数の零点の位置の解釈.
- 特殊な素数の革命的な探索方法.

無限の素数**空間**たちの探検は刺激的！