『無限解析入門』の誤差について

徳島大学・工学部　高橋 浩樹 (Hiroki Takahashi)
Faculty and School of Engineering
The University of Tokushima

§1. 『入門』における誤差

西暦 2007 年の今年，生誕 300 周年を迎えたオイラーは，その膨大な著作によって現在もなお多くの研究者に影響を与え続けている．その中でも高名な解析三部作の第一部に当たる『無限解析入門』(E101, E102) は，彼の学問の基礎となる極めて重要な著作である．

解析三部作	巻数	著述	出版
無限解析入門	2	1745	1748
微分計算教程	1	1748	1755
積分計算教程	3	1763	1768〜1770

オイラー全集には，この著作に大量の数値の計算間違いがあるという指摘がある．その数は百数十個にのぼるが，今回これらの誤差を検討したところ，多くの数値は必ずしも間違いとは言えないことが判明した．それは，全集では数値を「四捨五入」として取り扱っているためであり,「切捨て」による数値であると考えれば半数近くは正しい数値となる．その一方で，全集に記されていない間違いも新たに数十個判明したため，80 個程度の間違いが残っており，それらは「四捨五入」や「切捨て」では説明できない．もちろん単純な計算間違いの可能性が高いので，それぞれの数値や計算方法をあらためて検討したが，結局それらの誤差の生成原因を単純な計算間違いに帰着することはできなかった．もしこれらの誤差が偶然によって生まれたものではないとすると，次の可能性を検討せざるを得ない．

これらの誤差は意図的なものではないか.

小論ではこの仮説について紹介するが，その前に大多数の方が抱くであろう疑問に対し回答しておく．

疑問 1　大数学者がそのような奇妙なことをするだろうか.
疑問 2　正しい数値を間違った数値にするメリットはあるのか.
疑問 3　なぜ今までこのような仮説がなかったのか.
疑問 4　なぜこのような仮説を提出するのか.

回答 1

オイラーは当時アカデミーの設立と運営のためにフリードリッヒ大王の招聘を受けていた.『入門』の出版の前年に，大音楽家の大バッハことヨハン・セバスチャン・バッハが，フリードリッヒ大王に『音楽の捧げもの』という楽譜による謎掛けをしたという有名

な話がある．捧げられた楽譜ではいくつかの記号が逆転しており，そのままでは演奏できない．これらの奇妙な楽譜をいかに演奏するかという謎掛けであった．当時大バッハはすでに62歳であったが，このような遊び心を持っていたのである．

また時代は少しさかのぼるが，流率法に関して大数学者ニュートンがライプニッツにアナグラムによる暗号文を送っていたことも有名な話である．公表は控えたいが先取権を主張したい結果を暗号化することは，不自然なことではない．

上記のような大先達もいたことであるし，38〜41歳の若きオイラーが得意な計算によって謎掛けをしたとしても，それほど奇妙なことではないだろう．奇妙かどうかは，数値データや小論の仮説を検討した上で判断してほしい．

回答2

数学者や科学者が用いないような数値が微妙に間違っていたとしても，実用上は問題にならない．誤差があるのはそのような数値が大半である．さらに，正しい数値を記すことが，必ずしも読者にとって最良というわけでもない．というのも，正しい数値を表記した場合，再計算するような熱心な計算家にとっては単にチェックという意味しかない．しかし，誤差に何らかの興味深い事実を含ませて数値を表記した場合，数値を正しく求めた計算家には成果が与えられる．つまり，大半の数学者や科学者には実用上の問題は生じないし，値を再確認するような計算家にはメリットがある．大計算家のオイラーが後世の計算家に成果を与えようとするのは，不自然なことではないだろう．

回答3

オイラー全集で修正された数値は四捨五入によるものなので，その誤差を調べても意味はつかめない．また，誤差の考察は大計算家とされたオイラーを批判する行為につながる可能性があり，オイラーを尊敬する学者には気が進まない仕事である．いずれにせよ，誤差を調べるメリットがこれまでなかったと考える．

回答4

この仮説によって，オイラーの行動および著作の理解が進むと考えるからである．また，オイラーが誤差に含めた意図は壮大かつ繊細なものであると推測している．私自身はこの仮説を検討する価値は十分あると考えているが，その最終的な判断は読者諸賢にゆだねるほかはない．

§2. 誤差リスト

数値の間違いは最終桁付近のみにあり，誤植ではないと考えられる．以下のリストでは，正しい数値を記した後に，『入門』で誤っている数字のみを記した．（計算は[7]による．）

例えばP0のリストで，有効桁数7桁の正しい切捨て値は$E = 4.216965$であるが，『入門』では$E = 4.216964$と記されている．また，$\log_{10} 2$の小数点以下7桁までの正しい切捨て値は0.3010299であるが，『入門』では0.3010300と記されている．$\log_{10} 2 = 0.30102999\cdots$なので，四捨五入すれば0.3010300の方が正しく，この数値は極めて微妙な値である．

第 1 巻

P0		$\log_{10} 5$		
$A = 1.000000$		$lA = 0.0000000$		
$B = 10.00000$		$lB = 1.0000000$		$C = \sqrt{AB}$
$C = 3.162277$		$lC = 0.5000000$		$D = \sqrt{BC}$
$D = 5.623413$		$lD = 0.7500000$		$E = \sqrt{CD}$
$E = 4.216965$	4	$lE = 0.6250000$		$F = \sqrt{DE}$
$F = 4.869675$	4	$lF = 0.6875000$		$G = \sqrt{DF}$
$G = 5.232991$		$lG = 0.7187500$		$H = \sqrt{FG}$
$H = 5.048065$		$lH = 0.7031250$		$I = \sqrt{FH}$
$I = 4.958068$	9	$lI = 0.6953125$		$K = \sqrt{HI}$
$K = 5.002864$	5	$lK = 0.6992187$		$L = \sqrt{IK}$
$L = 4.980416$		$lL = 0.6972656$		$M = \sqrt{KL}$
$M = 4.991627$		$lM = 0.6982421$		$N = \sqrt{KM}$
$N = 4.997243$	2	$lN = 0.6987304$		$O = \sqrt{KN}$
$O = 5.000053$	2	$lO = 0.6989746$	5	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4.998647$		$lP = 0.6989525$		$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4.999350$		$lQ = 0.6989135$		$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4.999701$		$lR = 0.6989440$		$S = \sqrt{OR}$
$S = 4.999877$	6	$lS = 0.6989593$	2	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4.999965$	3	$lT = 0.6989669$	8	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5.000009$	8	$lV = 0.6989707$		$W = \sqrt{TV}$
$W = 4.999987$	4	$lW = 0.6989688$	7	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4.999998$	7	$lX = 0.6989698$	7	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5.000003$		$lY = 0.6989703$	2	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5.000000$		$lZ = 0.6989700$		
$\log_{10} 2$	$=$	0.3010299	300	
$1/\log_{10} 2$	$=$	3.3219280	77	

P1	$\log n$	
$l1$	0.0000000000000000000000000	
$l2$	0.6931471805599453094172321	
$l3$	1.0986122886681096913952452	
$l4$	1.3862943611198906188344642	
$l5$	1.6094379124341003746007593	
$l6$	1.7917594692280550008124773	
$l7$	1.9459101490553133051053527	4639
$l8$	2.0794415416798359282516963	4
$l9$	2.1972245773362193827904904	5
$l10$	2.3025850929940456840179914	

P2 $s_k = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \dfrac{\pi^k}{2^k k!}$ | $c_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \dfrac{\pi^k}{2^k k!}$

			00	+1.0000000000000000000000000000	
01	+1.5707963267948966192313216916		02	−1.2337005501361698273543113749	5
03	−0.6459640975062462536557565638	6	04	+0.2536695079010480136365633663	59
05	+0.0796926262461670451205055494	88	06	−0.0208634807633529608730516372	64
07	−0.0046817541353186881006854639	2	08	+0.0009192602748394265802417162	58
09	+0.0001604411847873598218726608	5	10	−0.0000252020423730606054810530	26
11	−0.0000035988432352120853404585	0	12	+0.0000004710874778818171503670	65
13	+0.0000000569217292196792681177	1	14	−0.0000000063866030837918522410	08
15	−0.0000000006688035109811467232	24	16	+0.0000000000656596311497947236	0
17	+0.0000000000060669357311061956	0	18	−0.0000000000005294400200734623	0
19	−0.0000000000000437706546731374	0	20	+0.0000000000000034377391790986	1
21	+0.0000000000000002571422892860	56	22	−0.0000000000000000183599165215	2
23	−0.0000000000000000012538995405	3	24	+0.0000000000000000000820675330	27
25	+0.0000000000000000000051564551	0	26	−0.0000000000000000000003115284	5
27	−0.0000000000000000000000181239		28	+0.0000000000000000000000010167	5
29	+0.0000000000000000000000000550	49	30	−0.0000000000000000000000000028	6

P3 $\dfrac{2(2^{n+1}-1)\pi^n |B_{n+1}|}{(n+1)!} - \dfrac{4}{\pi}$ | $\dfrac{1}{2^{n-1}\pi} - \dfrac{2\pi^n |B_{n+1}|}{(n+1)!}$

01	+0.2975567820597				
03	+0.0186886502773		01	−0.2052888894145	
05	+0.0018424752035	4	03	−0.0065510747882	
07	+0.0001975800715	4	05	−0.0003450292553	4
09	+0.0000216977373	245	07	−0.0000202791060	
11	+0.0000024011369	70	09	−0.0000012366527	
13	+0.0000002664133	2	11	−0.0000000764958	9
15	+0.0000000295864		13	−0.0000000047597	
17	+0.0000000032867		15	−0.0000000002969	
19	+0.0000000003651		17	−0.0000000000185	
21	+0.0000000000405		19	−0.0000000000011	
23	+0.0000000000045				
25	+0.0000000000005				

$$\zeta(k)=\sum_{n:\text{自然数}}\frac{1}{n^k}=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots.$$

$$\zeta(2)=\frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots\frac{1}{1}\pi^2 \qquad \zeta(4)=\frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdots\frac{1}{3}\pi^4$$

$$\zeta(6)=\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}\cdots\frac{1}{3}\pi^6 \qquad \zeta(8)=\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9}\cdots\frac{3}{5}\pi^8$$

$$\zeta(10)=\frac{2^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11}\cdots\frac{5}{3}\pi^{10} \qquad \zeta(12)=\frac{2^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13}\cdots\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$\zeta(14)=\frac{2^{12}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 15}\cdots\frac{35}{1}\pi^{14} \qquad \zeta(16)=\frac{2^{14}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 17}\cdots\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$\zeta(18)=\frac{2^{16}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 19}\cdots\frac{43867}{21}\pi^{18} \qquad \zeta(20)=\frac{2^{18}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 21}\cdots\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$\zeta(22)=\frac{2^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 23}\cdots\frac{854513}{3}\pi^{22} \qquad \zeta(24)=\frac{2^{22}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 25}\cdots\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$\zeta(26)=\frac{2^{24}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 27}\cdots\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

（これらの値には間違いは無い.）

PA $\zeta(k)\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$		**PB** $\zeta(k)\frac{1}{2^k}$	
$A=1.2337005501361698273543 1$		$\alpha=0.4112335167120566091181 0$	
$B=1.0146780316041920545462 5$		$\beta=0.0676452021069461369697 5$	
$C=1.0014470766409421219064 7$		$\gamma=0.0158959853435070178080 4$	
$D=1.0001551790252961193029 8$		$\delta=0.0039221771726482200757 0$	
$E=1.0000170413630448254881 8$	50816	$\varepsilon=0.0009775337647732598489 6$	8
$F=1.0000018858485831195759 0$		$\xi=0.0002442007047249287227 3$	4
$G=1.0000002092405192115001 0$		$\eta=0.0000610388945394933291 5$	
$H=1.0000000232371573791567 0$		$\theta=0.0000152590222512727150 3$	69977
$I=1.0000000025814375566597 7$		$\iota=0.0000038147118274431800 8$	
$K=1.0000000002868076974555 8$		$\kappa=0.0000009536752261753405 3$	
$L=1.0000000000318667751404 4$		$\lambda=0.0000002384186359525925 5$	154
$M=1.0000000000035407229439 2$		$\mu=0.0000000596046483283155 5$	
$N=1.0000000000003934124669 1$		$\nu=0.0000000149011614158981 3$	
$O=1.0000000000000437124485 9$		$\zeta=0.0000000037252903123398 6$	
$P=1.0000000000000048569368 2$		$o=0.0000000009313225754828 4$	
$Q=1.0000000000000005396595 7$		$\pi=0.0000000002328306437080 8$	7
$R=1.0000000000000000599621 7$		$\rho=0.0000000000582076609168 5$	
$S=1.0000000000000000066624 6$		$\sigma=0.0000000000145519152285 8$	
$T=1.0000000000000000007402 7$		$\tau=0.0000000000036379788071 0$	
$V=1.0000000000000000000822 5$		$\upsilon=0.0000000000009094947017 7$	
$W=1.0000000000000000000091 3$		$\phi=0.0000000000002273736754 5$	4
$X=1.0000000000000000000010 1$		$\chi=0.0000000000000568434188 6$	
		$\psi=0.0000000000000142108547 1$	
		$\omega=0.0000000000000035527136 8$	7

PC	$v(k) = \sum_{p:\text{素数}} \frac{1}{p^k}$	
02	0.452247420041065	222
04	0.076993139764246	52
06	0.017070086850637	9
08	0.004061405366518	5
10	0.000993603574437	3633
12	0.000246026470035	3
14	0.000061244396725	
16	0.000015282026219	
18	0.000003817278702	
20	0.000000953961124	3
22	0.000000238450446	
24	0.000000059608184	
26	0.000000014901555	
28	0.000000003725333	
30	0.000000000931326	3
32	0.000000000232830	
34	0.000000000058207	
36	0.000000000014551	

第 2 巻

$\sqrt{2}$	$= 1.41421356$	1.4142356

$\log_{10} 2^{\sqrt{2}}$	$= 0.4257207$	74
$2^{\sqrt{2}}$	$= 2.665144$	86
$10^{\sqrt{2}}$	$= 25.954553$	5870

$\cos \log 2$	$= 0.76923890136397$	5408
$\log \pi$	$= 1.1447298858494001741434273$	37
$\sin 1$	$= 0.84147098480789$	514
$\cos 1$	$= 0.54030230586813$	4341

$s + \cot s$	
$+0.63661977$	
-0.17200818	7
-0.09062597	6
-0.05892836	4
-0.04258548	3

§3. 仮説の概要

仮説 [7] の内容は，次のようにまとめられる．

オイラーは『無限解析入門』の数値に意図的に
誤差を含ませて以下の内容のパズルを出題した．

1巻	7リスト	解答1	解答2
P0	$\log_{10} 5$	全問題	全解答
P1	対数値	素因数分解・10進法	アルファベット詩篇 37, 111, 112
P2	正弦・余弦	オイラーの公式	詩篇のための曲
P3	正接・余接	一筆書き・オイラー標数	詩篇の周期 (2/1, 1/2)
PA	ゼータ値A	最小の非正則素数 37	太陽系，水星
PB	ゼータ値B	2番 59 + $(67, 101, 103, 131)$	太陽系，金星＋（地火彗木）
PC	ゼータ値C	3番 67 + $(149, 157)$	太陽系，地球＋（土，∗∗）
2巻	超越数	解答チェック	P0への接続

以下，前半の問題の中心となるP2の異常な誤差について説明する．数値からすぐに読み取れることは，次の点である．

1. 31個の数値中28個もの誤差がある．
2. 小数点以下28桁という中途半端な精度である．
3. 誤差の割合は急激に膨張している．
4. 誤差は最終一桁の範囲に収まっている．
5. ひとつのデータのみ絶対値が正値より大きい．

このような条件を満たす数値データですら，他に見つけることは難しいだろう．しかし，さらに異常なのはこれらの誤差が以下のように解釈できる点にある．

P2の数値は $\sin x$（正弦）と $\cos x$（余弦）のマクローリン展開の係数であり，古代から弦は楽器の音を作り出す主要な要素であった．このことから楽譜を連想し，誤差 $0123456\cdots$ をドレミファソラシ $\cdots$ に対応させる．さらに，係数をベキ指数の順番（つまりオイラーの公式）に交互に並びかえる．オイラーが敬虔なキリスト新教徒であったことおよび誤差の個数と精度の桁数28から賛美歌の8686の韻律（コモン・ミーター・ダブル）を連想し，いくつかのリストに記された「555」を拍子に含むようにして，次ページの楽譜を得る．

6. この楽譜は，極めて巧みに構成された曲になっている．

最も異常と思われるのはこの点である．まず，最初と2番目，そして韻律の最後の音階のみが「ド」，すなわち誤差0である．「ドドソミ」というイントロは，最初のドからユニゾン（オクターブ），完全5度，長3度という 1:1(1:2), 2:3, 4:5 という協和音（純正律）になっている．オイラーの音律が素数2, 3, 5によって構成された純正律であったことに注意する．3和音についても，最初に「ドミソ」,「ミソシ」,「ソシレ」，最後に「シレファ」という7つの主要3和音のうちの奇数番目が順番通り登場し，和音のお手本とも言えるような曲になっている．

さらに，全体の数値も以下のように見事に調整されている．

$$\begin{cases} x'_n = (\text{オイラーが与えた}\, n\, \text{番目の係数の小数部分}) \times 10^{28} \\ x_n = (\text{正値における}\, n\, \text{番目の係数の小数部分}) \times 10^{28} \end{cases}$$

$$e_n = x'_n - x_n \quad (\text{誤差})$$

$$\sum_{n=0}^{30} |e_n| = 111, \quad \sum_{n=0}^{30} e_n = -3 \Rightarrow \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{30} |e_n|}{\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{30} e_n\right|} = 37.$$

T 教授による詳細な解析

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{30} |e_n| \quad &= \sum_{n=0}^{8} |e_{2n}| + \sum_{n=1}^{8} |e_{2n-1}| + \sum_{n=17}^{30} |e_n| \quad &&= 37 + 37 + 37 \\ &= \sum_{n=0}^{15} |e_{2n}| + \sum_{n=1}^{15} |e_{2n-1}| &&= 55 + 56 = 111. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{30} x'_n \quad &= \sum_{n=0}^{15} x'_{2n} + \sum_{n=1}^{15} x'_{2n-1} \quad &&= 1 + (-1) \\ &= \sum_{n=0}^{30} x_n + \sum_{n=0}^{30} e_n &&= 3 + (-3) \quad = 0. \end{aligned}$$

こうして，P1 と PA の解答の 37 が現れ，総拍子数は 59 で PB の解答となる．

§4. 根拠および反証方法

仮説によって，オイラーの著作の数多くの奇妙な記述が説明できるようになる．すなわち，パズルの解答を奇妙な記述によって示したという説明である．

『入門』の例題の数値と語句

第6章に「$2^{\frac{7}{12}}$ の値を求めよ」,「洪水の後，6人の人間から人類が増えたとして $\cdots$」といった例題が示されている．前者は音楽に現れる平均律の完全5度，後者は旧約聖書の創世記に記された洪水という解釈が妥当であると考える．音楽と聖書から連想されるのは賛美歌であるが，オイラーが信仰したカルヴァン派の賛美歌は，詩篇の中にある可能性が極めて高い．

『入門』のアルファベット

オイラーは牧師になるために神学部に進学しており，ラテン語，ギリシャ語，ヘブライ語は必須科目であったため，古代言語の知識は豊富であったと考えられる．P0のリストではJとUを除いた14〜16世紀のラテン文字24文字，ゼータ値Bではギリシャ文字24文字が全て記されている．すると，YとZが奇妙にも除かれたゼータ値Aの22文字のアルファベットから古ヘブライ文字が連想され，上記の詩篇と合わせてアルファベット詩篇が連想されることになる．

さらに，26までのゼータ値や18個のゼータ値Cといった数も同様な解釈ができる．すなわち，18世紀以降のラテン文字の26文字（A〜Zの文字），古ヘブライ文字に順番通り対応するラテン文字18文字（GとJを除外したA〜Tの文字）である．ゼータ値のリストの対応と，上記の文字体系の対応が見事に調和する．

論文E352の太陽と月の記号

1749年に著述され，1768年に出版された『ベキ和と逆数のベキ和の美しい関係についての注意』の論文で，以下のような記号が用いられている．

$$\odot = 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \&c.$$

$$☽ = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \&c.$$

これらの記号を用いて，ゼータ関数を太陽や月という天体にたとえたことをはっきりと示している．これらのたとえが私には不可解であったために，オイラーがパズルを出題したのではないかと考えるようになった．このたとえの背景には,「万物は数なり」があると推測される．

なお，オイラーは論文著述の前年の1748年7月25日に金環日食を観測しており，この日食をゼータ関数の関数等式にたとえたと推測する．さらに，オイラーはその日の丁度7年前の1741年7月25日にロシアからベルリンに到着しており，この日食にかけた意気込みがうかがえる．実際に彼は，この日食に関わる2本の論文を著述している．

論文 E352 の 34 までのゼータ値

上記の論文では 34 までのゼータ値を記して,「私がこれまで計算した限りを示す」としている. ここまで手計算で求める数学者は稀であるが, 非正則素数に興味があったとすれば奇妙ではない. p が非正則素数かどうかは $p-3$ までのゼータ値の分子を調べれば良い. したがって, 最小の非正則素数 37 を判定するためには, $34 = 37 - 3$ までのゼータ値を調べれば良いわけであり, 34 までの値を求めるのは自然である. なお, ある素数が非正則素数かどうかを判定するだけならばその素数を法とした計算で良いので, 指数が大きい非正則素数はこの種の計算で調べたものと考えている.

著書 E343『ドイツ王女への手紙』の構成

最も強力な根拠は, この著名な著書にある. パズルを出題したとすれば, その解答を書き残すのが自然である. この著書は 1760〜62 年に著され, 太陽と月の記号が記された論文 E352 と同じ年に出版された. パズルの解答は, 3 巻のうちの第 1 巻に順番通りに示されたと考えている. 以下が第 1 巻の内容の概略であるが, 解答に当たると推測される箇所を太字で表わした.

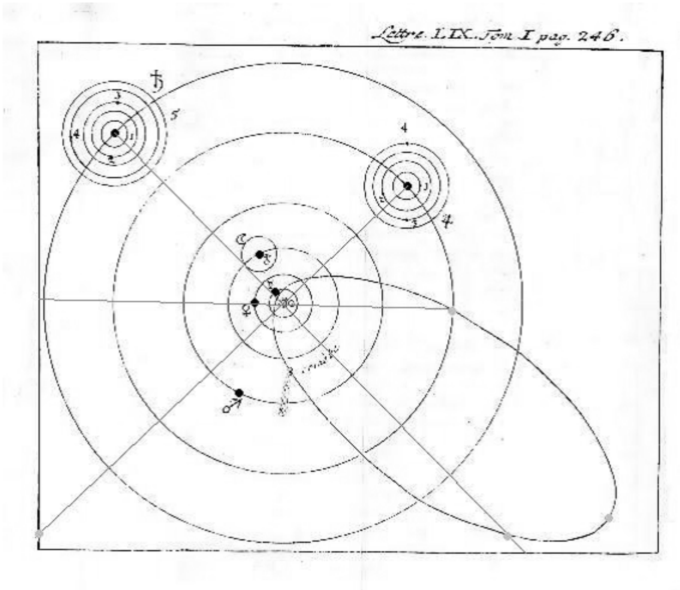
> **広がり (P1)**, 速さ, 音, **音楽 (P2)**, 空気, 気圧, 空気銃, 光, 発光, 光の伝達, 発光体, 色, 屈折, 異なる色の屈折, 空の色, 平面鏡, **凹凸面鏡**, **集光鏡 (P3)**, 焦点, 目の不思議, 重力, 地球の形, 月の引力, 万有引力, 天体間の相互引力, **太陽系 (PABC)**, 相互引力による小変化, 上げ潮と引き潮, 万有引力の説明, 物体の性質, 慣性, 変化, モナド, 力の性質, 他種の力

前半の問題については, [8] で解答を説明している. 後半の問題では, E352 でゼータ関数を太陽と月にたとえたのだから, 太陽系の他の天体をゼータ関数の何にたとえるかを答えるのは自然だろう. その解答は, ゼータ値の問題 PABC の解答の非正則素数であると推測する. その根拠は, 次ページの『王女への手紙』の太陽系の図にある. その下の非正則素数の図と見比べると, 惑星の方向と非正則素数の方向が順番にほぼ対応していることに気づく. また,『王女への手紙』の第 103 番目前後の手紙から, 103 を数多くの彗星のうちの一つにたとえたことも連想できる.

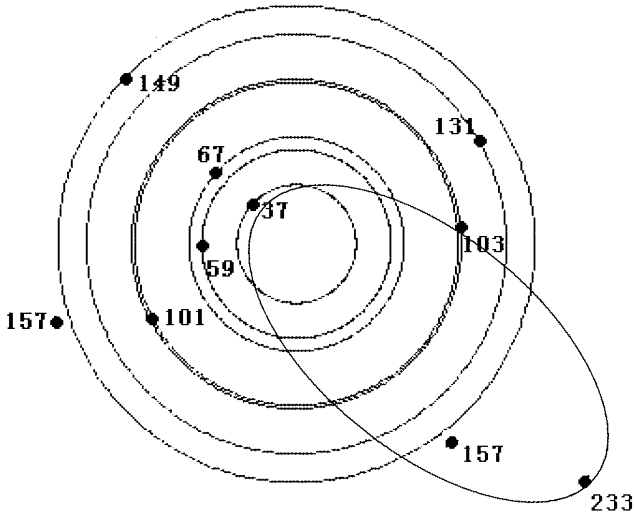
なお, オイラーの太陽系と類似した図を他に探し出すことは, 困難であると考えている. また, 私がこの著書が解答であることに気が付いたのは『入門』のパズルを解き終えた後であり, 著書の内容に合わせて答えを導いたわけではない.

『入門』で繰り返し表示された近似値

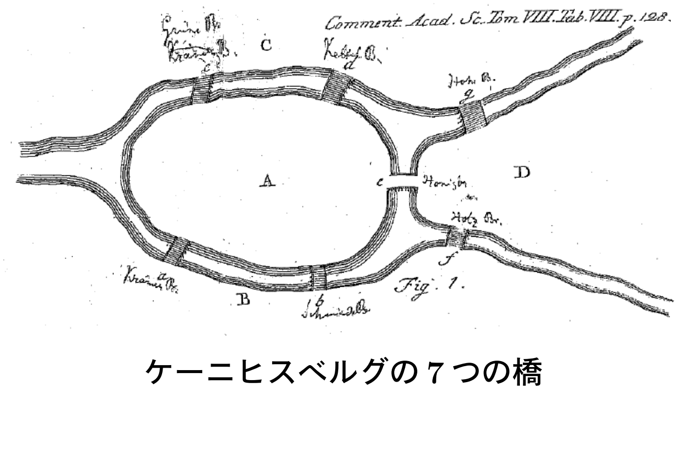
$\log_{10} 2 = 0.3010300$ という近似値が繰り返し表示されたのは, 上記の PABC の解答の「7 つの非正則素数＝太陽系の 3 つの内惑星＋ 1 つの彗星＋ 3 つの外惑星」および P3 の解答の「7 つの橋（3+1+3）」を示すという理由が考えられる. 次ページのオイラーによる太陽系の図では彗星の位置, 7 つの橋の図では橋 e の描写に注目する.



オイラーの太陽系



非正則素数の図



ケーニヒスベルグの７つの橋

P1, P2, P3 の解答についても，[8] で説明しているように『王女への手紙』の中で示されたと推測している．このように，仮説によって多くの奇妙な記述が説明されるものと考えている．数多くの奇妙な記述や誤差を「偶然の連鎖」によって説明するよりも，オイラーの「一貫した意図」によって説明する方が理解しやすいのではないだろうか．

最後に反証方法を挙げる．仮説の価値は反証方法の存在によって定まるからである．

A　数値の間違いを他の方法で説明する．
B　同様な数値データが他にもあることを示す．

一般に大量の数値に誤差がある場合は，その生成理由を推測できる．P2 の 31 個の数値には 28 個もの最終 1 桁のみの誤差がある．単なる計算間違いであれば，その理由を推測できるはずである．もし A による反証が難しいとすれば，B のように生成理由が説明できない同様のリストを提示するべきだろう．しかし 30 個近くの数値の誤差が，偶然にも曲に聴こえるような数値リストを探し出せるだろうか．

なお，大量の文字から恣意的に文字を取り出すといった偽暗号は，B によって論破できる．そういった偽暗号は，いかなる文章にも一定の割合で存在することを示せば良いのである．しかしながら，今回のリストのような異常なリストを探し出すことは，極めて困難であると考えている．

参考文献

［1］ Archive staffs 『Euler Archive』（http://www.math.dartmouth.edu/~euler/）
［2］ W・ダンハム『オイラー入門』
（シュプリンガー・フェアラーク東京, 黒川・若山・百々谷訳）
［3］ L・オイラー『Leonhardi Euleri Opera Omnia』 (Birkhäuser)
［4］ L・オイラー『オイラーの無限解析』『オイラーの解析幾何』
（海鳴社, 高瀬正仁訳）
［5］ E・A・フェルマン『オイラー その生涯と業績』
（シュプリンガー・フェアラーク東京, 山本敦之訳）
［6］ A・ヴェイユ『数論 歴史からのアプローチ』（日本評論社, 足立恒雄・三宅克哉訳）
［7］ 高橋浩樹『無限オイラー解析』（現代数学社）
［8］ 高橋浩樹『オイラー数学の源流』 理系への数学　2007 年 9 月号～（現代数学社）